Lois de probabilités

1 Un exemple

Exemple 1. Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Le tableau ci-dessous résume les résultats possibles :

Dé 2 / Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Notons S la somme des deux dés.

On dit que S est une *variable aléatoire* car sa valeur varie de façon aléatoire en fonction des issues de l'expérience aléatoire.

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est constitué des couples de la forme $(\,i\,;\,j\,)$ où i et j sont des nombres entiers compris entre 1 et 6. On notera $\Omega = \left\{ (1\,;\,1)\,;\,(1\,;\,2)\,;\,(1\,;\,3)\,;\ldots;\,(5\,;\,6)\,;\,(6\,;\,6) \right\} = \left\{ (\,i\,;\,j\,) \right\}_{i,j\in [\![1\,;\,6]\!]}$

Les valeurs prises par S sont les nombres de l'ensemble $S(\Omega) = \left\{ 2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12 \right\}$

2 Variable aléatoire

Dans tout ce paragraphe, on considère l'univers $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ d'une expérience aléatoire ($n \in \mathbb{N}$), muni d'une probabilité.

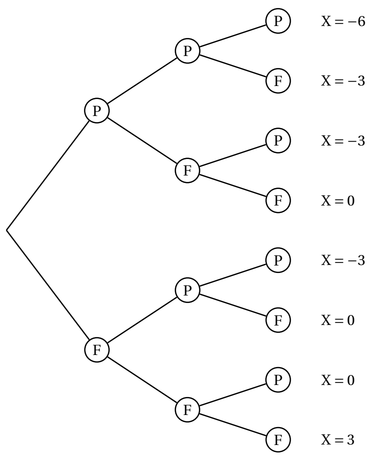
Définition 1 (Variable aléatoire discrète)**.**

Une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une fonction qui à tout élément de Ω associe un nombre réel.

Remarques 1 :

- Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z, S... L'événement "X prend la valeur x" est généralement noté "$X = x$". L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X est souvent noté $X(\Omega) = \{x_1\,; x_2; \ldots; x_n\}$.
- En théorie, $X(\Omega)$ est un ensemble pouvant être infini. Cependant, en première, on se limite au cas où il est fini.
- Il existe deux types de variables aléatoires réelles : discrètes et continues. En 1$^{\text{re}}$, on ne rencontrera que des variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire où les valeurs prises sont dénombrables (des valeurs que l'on peut compter une à une).

Exemple 2. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée et on note à chaque lancer le côté sorti : P pour pile et F pour face.



On choisit pour univers de cette expérience aléatoire :
$\Omega = \{(P;P;P);(P;P;F);(P;F;P);(P;F;F);(F;P;P);(F;P;F);(F;F;P)(F;F;F)\}$
Un joueur gagne 1€ à chaque fois que face apparaît et perd 2 euros chaque fois que pile apparaît. A chaque éventualité de l'univers Ω on associe donc un nombre réel égal au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Par exemple, au résultat $(P;F;F)$ on associe le réel 0 et au résultat $(P;P;P)$, on associe le réel -6.
On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'univers Ω de cette expérience.
L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{-6;-3;0;3\}$.

Définition 2 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Lorsqu'à chaque valeur de $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ on associe la probabilité de l'événement "$X = x_i$", on définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
On note parfois $p(X = X_i) = p_i$.

Remarques 2 :

- La loi de probabilité de X est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $[0; 1]$.
- $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- La loi de probabilité est souvent résumée dans un tableau :

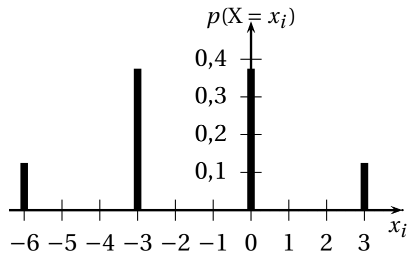
Valeurs de X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Exemple 3. Reprenons la situation de l'exemple précédent (lancer d'une pièce de monnaie). En supposant l'équiprobabilité, on obtient la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	-6	-3	0	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

En effet, on constate par exemple que l'événement $X = -6$ est réalisé dans un cas sur 8 donc $p(X = -6) = \dfrac{1}{8}$.

On représente ci-dessous le diagramme en bâtons de cette loi de probabilité :



▷ **Exercice 1.** On reprend l'Exemple 1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S.

3 Espérance, variance et écart type

3.1 Définitions

On considère une variable aléatoire discrète X définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et on note l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\} = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Définition 3 (Espérance - Variance - Écart type)**.**

- On appelle **espérance mathématique** de X le réel $\mathbb{E}(X)$ défini par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- On appelle **variance** de X le réel $\mathbb{V}(X)$ défini par : $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times \left((x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 = \mathbb{E}\Big(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\Big)$
- On appelle **écart type** de X le réel $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Remarques 3 :

- La variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart type sont des nombres réels positifs.
- L'espérance et l'écart type sont exprimés dans la même unité que les valeurs prises par X.
- Un jeu est dit **équitable** lorsque l'espérance de gain est nulle. Il est **favorable au joueur** lorsque $\mathbb{E}(X) > 0$.
- L'écart type caractérise la dispersion de la loi de probabilité d'une variable aléatoire. Il permet de comparer deux variables aléatoires.

Exemple 4. Reprenons l'exemple du lancer de la pièce de monnaie.

- Espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = \dfrac{1}{8} \times (-6) + \dfrac{3}{8} \times (-3) + \dfrac{3}{8} \times 0 + \dfrac{1}{8} \times 3 = -\dfrac{3}{2}$. Cela signifie que sur un grand nombre de parties jouées, on perdra en moyenne 1,5 € par partie.

- Variance : $\mathbb{V}(X) = \sum \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 = \frac{1}{8} \times \left(-6 - \frac{-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(-3 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(3 + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

- Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60$ ce qui signifie qu'en moyenne, les valeurs prises par la variable aléatoire sont éloignées d'environ 2,60 € de l'espérance.

▷ **Exercice 2.** On change les règles du jeu du lancer de pièce et la variable aléatoire Y qui donne le gain algébrique d'un joueur suit la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Y	-3	-1	0	3
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$ puis comparer et interprétez les résultats obtenus avec les deux règles.

▷ **Exercice 3.** Calculer pour le lancer des deux dés, l'espérance, l'écart type et la variance de la variable aléatoire S.

▷ **Exercice 4.** Dans une tombola, 100 tickets sont en jeu, répartis de la manière suivante :

- un ticket permet de gagner 100€;
- neuf tickets permettent de gagner 10€;
- les autres tickets sont perdants.

Pour pouvoir jouer, il faut miser 3 euros. Le jeu est-il favorable au joueur?

3.2 Propriétés

Propriété 1 (Espérance et transformation affine)**.**

Pour tous nombres réels a et b, $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(x) + b$

DÉMONSTRATION .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + b) &= p_1(ax_1 + b) + p_2(ax_2 + b) + \cdots + p_k(ax_n + b) \\
&= a(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_k) + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)b \\
&= a\mathbb{E}(X) + b \qquad car \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1
\end{aligned}$$

■

Théorème 1 (de König-Huygens - Autre expression de la variance)**.**

$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - \mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i)^2 - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$ que l'on peut noter :$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\Big)$.

DÉMONSTRATION .
En utilisant la Propriété 1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) \quad \text{(par définition)} \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(2X\mathbb{E}(X)\right) + \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\left[\mathbb{E}(X)\right]^2 + \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.
\end{aligned}$$

■

Exemple 5. On reprend l'exemple du lancer de la pièce de monnaie. On sait que $\mathbb{E}(X) = -\frac{3}{2}$.

Valeurs de X	-6	-3	0	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i)^2 - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \\
&= \frac{1}{8} \times (-6)^2 + \frac{3}{8} \times (-3)^2 + \frac{3}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 3^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= 9 - \frac{9}{4} \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

▷ **Exercice 5.** Calculer la variance de la variable aléatoire S de l'exemple 1 en utilisant la formule de König-Huygens.

Propriété 2 (Variance et transformation affine)**.**

Pour tous nombres réels a et b, $\mathbb{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(a\mathrm{X}+b) = |a|\sigma(\mathrm{X})$

DÉMONSTRATION .

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left((ax_i+b)^2 - (\mathbb{E}(a\mathrm{X}+b))^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2 - (a\mathbb{E}(\mathrm{X})+b)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(a^2x_i^2 + 2abx_i + \cancel{b^2} - a^2(\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2 - 2ab\mathbb{E}(\mathrm{X}) - \cancel{b^2}\right)\\
&= \left(a^2\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2\right) - \left(a^2(\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\sum_{i=1}^{n} p_i\right) + \left(2ab\sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right) - 2ab\mathbb{E}(\mathrm{X})\sum_{i=1}^{n} p_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\\
&= a^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2\right) - (\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\right) + 2ab\mathbb{E}(\mathrm{X}) - 2ab\mathbb{E}(\mathrm{X})\\
&= a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma(a\mathrm{X}+b) = \sqrt{\mathbb{V}(a\mathrm{X}+b)} = \sqrt{a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})} = |a|\sigma(\mathrm{X})$ ■

4 Correction des exercices

▷ **Exercice 1.**

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(\mathrm{S}=s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Par exemple, sur les 36 issues possibles , une seule donne la somme « 2 ». Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 2, que l'on note $p(\mathrm{S}=2)$, est égale à $\dfrac{1}{36}$.

▷ **Exercice 2.** On change les règles du jeu du lancer de pièce et la variable aléatoire Y qui donne le gain algébrique d'un joueur suit la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Y	-3	-1	0	3
$p(\mathrm{Y}=y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Calculer E(Y) et σ(Y) puis comparer et interprétez les résultats obtenus avec les deux règles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Y}) &= \frac{1}{8}\times(-3) + \frac{2}{8}\times(-1) + \frac{3}{8}\times 0 + \frac{2}{8}\times 3\\
&= \frac{1}{8}\\
&= 0,125
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que sur un grand nombre de parties jouées, le gain moyen par partie est 0,125 €.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\mathrm{Y}) &= \frac{1}{8}\times\left(-3-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{2}{8}\times\left(-1-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{8}\times\left(0-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{2}{8}\times\left(3-\frac{1}{8}\right)^2\\
&= \frac{231}{64}\\
&\simeq 3,61
\end{aligned}$$

d'où $\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(Y)} = \sqrt{\dfrac{231}{64}} = \dfrac{\sqrt{231}}{8} \simeq 1,90$

On remarque qu'avec la nouvelle règle, le jeu devient favorable au joueur car l'espérance de gain est désormais positive et les valeurs sont moins dispersées car l'écart type est plus faible.

▷ **Exercice 3.** Reprenons l'exemple du lancer de dés.

$$\mathbb{E}(S) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S) = 7}$$

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= \frac{1}{36} \times (2-7)^2 + \frac{1}{18} \times (3-7)^2 + \frac{1}{12} \times (4-7)^2 + \cdots + \frac{1}{36} \times (12-7)^2 \\ &= \frac{35}{6} \\ &\simeq 5,83\end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma(S) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\dfrac{35}{6}} \simeq 2,42$

▷ **Exercice 4.** Dans une tombola, 100 tickets sont en jeu, répartis de la manière suivante :

- un ticket permet de gagner 100€ ;
- neuf tickets permettent de gagner 10€ ;
- les autres tickets sont perdants.

Pour pouvoir jouer, il faut miser 3 euros. Le jeu est-il favorable au joueur ?
Déterminons la loi de la probabilité G qui donne le gain en euros d'un joueur.
$G(\Omega) = \{ -3 \,;\, 7 \,;\, 97 \}$

Valeurs de G	-3	7	97
p_i	$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{100}$

$\mathbb{E}(G) = \sum \dfrac{9}{10} \times (-3) + \dfrac{9}{100} \times 7 + \dfrac{1}{100} \times 97 = -\dfrac{11}{10} < 0$. Ainsi le jeu est défavorable au joueur.

▷ **Exercice 5.** Nous avions déterminé la loi de probabilité de S et son espérance.

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$\mathbb{E}(S) = 7$
$\mathbb{V}(S) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{1}{36} \times 2^2 + \dfrac{1}{18} \times 3^2 + \ldots + \dfrac{1}{36} \times 12^2 - 7^2 = \dfrac{35}{6}$