Nouvelle-Calédonie novembre 2003

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale à 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année onsidérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $P(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \le k \le n$.

2. *a*. Établir l'égalité $\ln[P(S_n = 0)] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$.

b. Démontrer que $p(S_n = k+1) = p(S_n = k)\times\dfrac{n-k}{k+1}\times\dfrac{10}{n-10}$, ou k est un entier naturel tel que $0 \le k \le n-1$.

c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k) = e^{-10}\times\dfrac{10^k}{k\,!}$ pour $0 \le k \le n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k+1) = e^{-10}\times\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)\,!}$ pour $0 \le k+1 \le n$.

d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k) = e^{-10}\times\dfrac{10^k}{k\,!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \le k \le n$

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\times\dfrac{10^k}{k\,!}$ est une approximation acceptable de $P(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

CORRECTION

1. S_n suit une loi binomiale de paramètres $(n\,;\,p)$ donc $E(S_n) = n\,p = 10$ donc $p = \dfrac{10}{n}$

S_n suit une loi binomiale de paramètres $n\,;\,\dfrac{10}{n}$ donc : $p(S_n = k) = \binom{n}{k}\,p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$

2. *a*. $P(S_n = 0) = (1-p)^n = \left(1-\frac{10}{n}\right)^n$ donc $\ln[P(S_n = 0)] = \ln\left(1-\frac{10}{n}\right)^n = n\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)$

$$\ln[P(S_n = 0)] = n\times\frac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}\times\frac{-10}{n} = -10\times\frac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}$$

Soit $h = -\dfrac{10}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} h = 0$ et $\dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ or $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln[P(S_n = 0)] = -10$ or $P(S_n = 0) = e^{\ln[P(S_n = 0)]}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$

2. *b*. $p(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ et $p(S_n = k+1) = \binom{n}{k+1}\left(\frac{10}{n}\right)^{k+1}\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-(k+1)}$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n\,!}{(k+1)\,!\,(n-(k+1))\,!} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\times\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k}\times\frac{n-k}{k+1}$$

$$p(S_n = k+1) = \binom{n}{k}\times\frac{n-k}{k+1}\times\left(\frac{10}{n}\right)^k\times\frac{10}{n}\times\frac{\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}}{1-\frac{10}{n}}$$

$$p(S_n = k+1) = p(S_n = k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n}\times\frac{n}{n-10} = p(S_n = k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}.$$

2. *c*. $\dfrac{n-k}{k+1}\times\dfrac{10}{n-10} = \dfrac{n-k}{n-10}\times\dfrac{10}{k+1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-k}{n-10} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-k}{n-10}\times\dfrac{10}{k+1} = \dfrac{10}{k+1}$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k) = e^{-10}\times\dfrac{10^k}{k!}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k+1) = e^{-10}\times\dfrac{10^k}{k!}\times\dfrac{10}{k+1}$

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k+1) = e^{-10}\times\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$

2. *d*. La propriété est vraie pour $k = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-10} = e^{-10}\times\dfrac{10^0}{1!}$

Montrons que pour tout k de $\mathbb{N}$, tel que $0 \leq k \leq n$, la propriété est héréditaire :

d'après la question précédente si $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k) = e^{-10}\times\dfrac{10^k}{k!}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p(S_n = k+1) = e^{-10}\times\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$

donc la propriété est héréditaire, donc est vraie pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$

3. $P(S_n = 3) \approx e^{-10}\times\dfrac{10^3}{3!}$ soit $P(S_n = 3) \approx 0{,}0076$