Pondichéry avril 2015

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés nombres de Mersenne.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD(b ; c) = 1.
Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que : si b divise a et c divise a alors le produit $b\,c$ divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$2^{33} - 1 \div 3$	2863311530
$2^{33} - 1 \div 4$	2147483648
$2^{33} - 1 \div 12$	715827882,6

Il affirme que 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ et 12 ne divise pas $2^{33} - 1$

a. En quoi cette affirmation contredit elle le résultat démontré à la question 1. ?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1$ [3], montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$

d. Calculer la somme S = $1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + ... + (2^3)^{10}$

e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD(N, k) représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3 k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n. Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD($2^n - 1$, k) $\neq 0$ et $k < \sqrt{2^n - 1}$ Affecter à k la valeur $k + 1$ Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher k. Si $k > \sqrt{2^n - 1}$ Afficher « CAS 1 » Sinon Afficher « CAS 2 » Fin de Si

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

CORRECTION

1. b divise a, donc il existe un entier q tel que $a = b\,q$
c divise a donc c divise $b\,q$, PGCD(b ; c) = 1 donc d'après le théorème de Gauss, c divise q donc il existe un entier k tel que $q = c\,k$
$a = b\,q = b\,c\,k$, donc le produit $b\,c$ divise a.

2. *a.* 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ donc d'après la propriété précédente, 3×4 divise $2^{33} - 1$.
Cette affirmation est en contradiction avec le résultat démontré à la question 1.

b. $2^{33} - 1$ est un nombre impair donc n'est pas divisible par 2 donc pas divisible par 4.

c. $2 \equiv -1 \quad [3]$, donc $2^{33} \equiv (-1)^{33} \quad [3]$ soit $2^{33} \equiv -1 \quad [3]$ donc $2^{33} - 1 \equiv -2 \quad [3]$ donc, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$

d. Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ donc $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + ... + (2^3)^{10} = \dfrac{(2^3)^{11}-1}{2^3-1}$.

e. $S = \dfrac{(2^3)^{11}-1}{2^3-1}$ donc $(2^3)^{11} - 1 = S \times (2^3 - 1)$ soit $(2^3)^{11} - 1 = 7\,S$, S est un nombre entier donc 7 divise $2^{33} - 1$.

3. $2^7 - 1 = 127$ et $11 < \sqrt{127} < 12$ or 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 sont les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{127}$, ils ne divisent pas 127 donc $2^7 - 1$ est un nombre premier.

4. *a.* $n = 33$

k	2	3	4	5	6	7	Affichage
MOD($2^{33}-1$, k)	1	1	3	1	1	0	Cas 2

$n = 7$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Affichage
MOD(2^7-1 , k)	1	1	3	2	1	1	7	1	7	6	Cas 1

b. Le CAS 2 affiche que le nombre de Mersenne étudié est n'est pas premier (divisible par k)

c. Le CAS 1 affiche que le nombre de Mersenne étudié est premier.