EXERCICE 1 (3 points) Commun à tous les candidats

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.
Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.
Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02\ s^{-1}$.
Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions. Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96\ s$ et d'écart-type $\sigma = 26\ s$.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?

2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.

a. Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.

b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.

3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.
Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$.

a. Déterminer la forme trigonométrique de S_n.

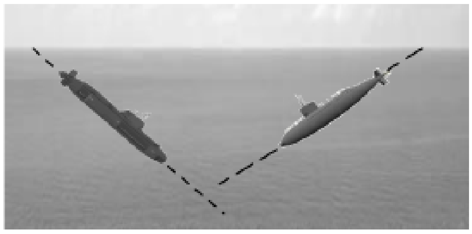
b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et* l'*absence de réponse* n'*est pas pénalisée.*

Affirmation a : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ orthonormé dont l'unité est le mètre.



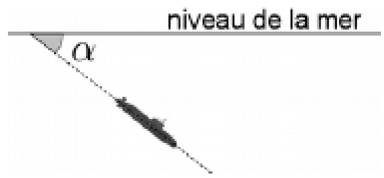
Le plan défini par $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 140 - 60\,t \\ y(t) = 105 - 90\,t \\ z(t) = -170 - 30\,t \end{cases}$.

a. Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.

b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?

2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.
Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

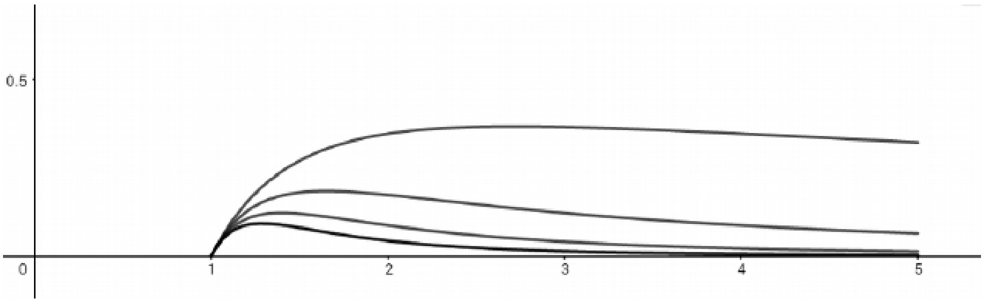


3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

EXERCICE 4 **(5 points)** **Commun à tous les candidats**

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5] par : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$

Pour tout entier $n > 0$, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes C_n pour n appartenant à {1 ; 2 ; 3 ; 4}.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] : $f'_n(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle [1 ; 5]. On note A_n le point de la courbe C_n ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. *a.* Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] : $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leq \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe C_n c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe C_n.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5 **(5 points)** **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\dfrac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\dfrac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la $^{\text{nième}}$ partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement.
On a donc $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de réels (a_n) par : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}$.

On appelle cette suite la **suite de Fibonacci**.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 1 à n :
    C ← A + B
    A ← ...
    B ← ...
Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3 et A^4. Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$.
En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}.
Soit p un entier naturel non nul.
Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

4. *a.* Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

b. On peut calculer $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$.
Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question **4. *a.*** ?

CORRECTION

EXERCICE 1 (3 points) Commun à tous les candidats

1. La durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique est $E(X) + E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} + \mu = 50 + 96$ soit 146 *s* ou encore 2 minutes 26 secondes

2. *a.* La probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes (donc plus de 120 secondes) est

$$P(X > 120) = e^{-120\lambda} = e^{-2,4} \approx 0,0907$$

b. La probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes est $P(Y < 90) \approx 0,409$ (à la calculette)

3. X suit une loi exponentielle donc une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{X>t}(X > t + h) = P(t)$

donc $P_{X>60}(X > 60 + 30) = P(X > 30) = e^{-30 \times 0,02} = e^{-0,6}$

Le fait de raccrocher puis de rappeler n'augmente pas ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire, elle aurait mieux fait de rester en ligne.

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats

1. $|1 + i| = |1 - i| = \sqrt{2}$, $1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$1 - i$ est le conjugué de $1 + i$ donc $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

2. *a.* Pour tout entier naturel n, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ et $(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{-\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{-n\pi}{4}}$

$S_n = (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{i\frac{-n\pi}{4}}\right)$ donc $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ donc S_n est un réel.

Cas 1 : Si $\dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi \le \dfrac{n\pi}{4} \le \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors $2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4} > 0$ donc $|S_n| = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ et $\arg S_n = 0$ à 2π près.

soit en multipliant par 4 : $-2\pi + 8k\pi \le n\pi \le 2\pi + 8k\pi$ donc en divisant par π : $-2 + 8k \le n \le 2 + 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$$S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}(\cos 0 + i\sin 0)$$

Cas 2 : Si $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \le \dfrac{n\pi}{4} \le \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ alors $2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4} < 0$ donc $|S_n| = -2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ et $\arg S_n = \pi$ à 2π près.

soit en multipliant par 4 : $2\pi + 8k\pi \le n\pi \le 6\pi + 8k\pi$ donc en divisant par π : $2 + 8k \le n \le 6 + 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$$S_n = -2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

b. **Affirmation a** : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel. VRAI

$S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$ donc S_n est un réel

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$. VRAI

Si $\dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ alors $n = 2 + 4k$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $S_n = 0$

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

1. *a.* Si $t = 0$ alors les coordonnées du sous-marin au début de l'observation sont A (140 ; 105 ; – 170)

b. En cinématique, le vecteur vitesse est un vecteur obtenu en dérivant les coordonnées cartésiennes de la position par rapport au temps. $\overrightarrow{v_1(t)}$: $\begin{cases} x'(t) = -60 \\ y'(t) = -90 \\ z'(t) = -30 \end{cases}$.

La norme de ce vecteur dans ce repère orthonormé nous donne la vitesse. $v_1 = \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = 30\sqrt{14}$

2. Soit A (140 ; 105 ; – 170) ; B (80 ; 15 ; – 200) et C (80 ; 15 ; – 170).

B est le point de la trajectoire du premier sous-marin obtenu pour $t = 1$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc (BC) est perpendiculaire au niveau de la mer

Le plan (ABC) contient la droite (AB) donc la trajectoire du sous-marin et est perpendiculaire au niveau de la mer.

Le triangle ABC est rectangle en C : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(AC) est parallèle au niveau de la mer (droite du plan z = – 170) donc α est une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$, AB = $\sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = 30\sqrt{14}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -90 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix}$, AC = $\sqrt{60^2 + 90^2 + 0^2} = 30\sqrt{13}$

$\cos \alpha = \dfrac{AC}{AB}$ soit $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$ donc $\alpha \approx 15,5$ °

3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées (68 ; 135 ; − 68) et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées (− 202 ; − 405 ; − 248) avec une vitesse constante.

Le sous-marin se déplace à vitesse constante donc $\overrightarrow{v_2(t)}$ (a ; b ; c) où a, b et c sont des réels.

donc pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_2(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 68 + a\,t \\ y(t) = 135 + b\,t \\ z(t) = -68 + c\,t \end{cases}$.

Si $t = 3$ alors $\begin{cases} x(3) = 68 + 3a = -202 \\ y(3) = 135 + 3b = -405 \\ z(3) = -68 + 3c = -248 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3a = -270 \\ 3b = -540 \\ 3c = -180 \end{cases}$ soit $a = -90$; $b = -180$ et $c = -60$

Pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_2(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 68 - 90\,t \\ y(t) = 135 - 180\,t \\ z(t) = -68 - 60\,t \end{cases}$.

Donc l'instant t, exprimé en minutes, pour lequel les deux sous-marins sont à la même profondeur correspond à l'instant où les cotes des deux sous-marins sont identiques soit : $-170 - 30\,t = -68 - 60\,t \Leftrightarrow 30\,t = 170 - 68 \Leftrightarrow t = 3,4$ min

EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

1. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5], soit $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^n & v'(x) = n\,x^{n-1} \end{cases}$

$$f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - n\,x^{n-1}\ln(x)}{(x^n)^2} = \frac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}}, \text{ donc } f'_n(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle [1 ; 5] donc l'abscisse de A_n est solution de $f'(x) = 0$ soit $1 - n\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

$x^n = \mathrm{e}$ donc $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}}$ le point A_n a pour coordonnées $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} ; \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}}\right)$.

$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x_{A_n}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}} = y_{A_n}$ donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$ **.**

3. *a.* La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur [1 ; 5] donc pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] : $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$ soit $0 \leq \ln(x) \leq \ln(5)$, $x^n > 0$ donc en multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{x^n}$ on obtient que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1 ; 5] : $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leq \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

b. Pour tout entier $n > 1$, une primitive de la fonction définie sur [1 ; 5] par $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ est la fonction F définie sur [1 ; 5] par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}} \text{ donc } \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(5) - \mathrm{F}(1) = -\frac{1}{(n-1)\times 5^{n-1}} - \left(-\frac{1}{(n-1)}\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. La fonction f est positive sur [1 ; 5] donc l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe C_n est $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

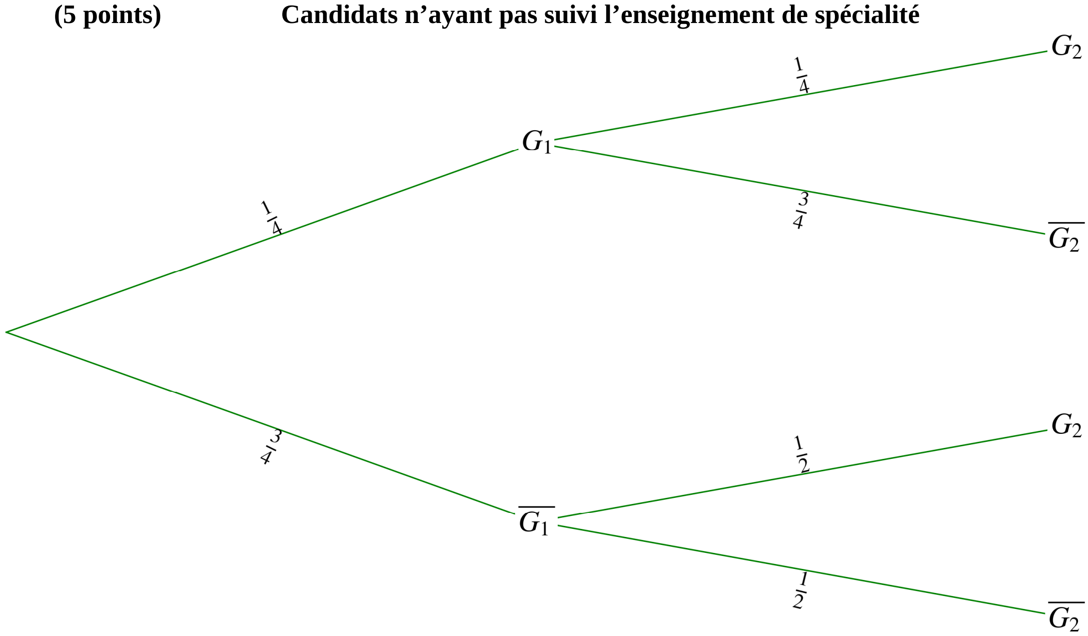
Si $n > 1$, $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leq \dfrac{\ln(5)}{x^n}$ donc $0 \leq \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$

Soit $0 \leq \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ et $5 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$

La valeur limite de l'aire sous la courbe C_n quand n tend vers $+\infty$ est 0.

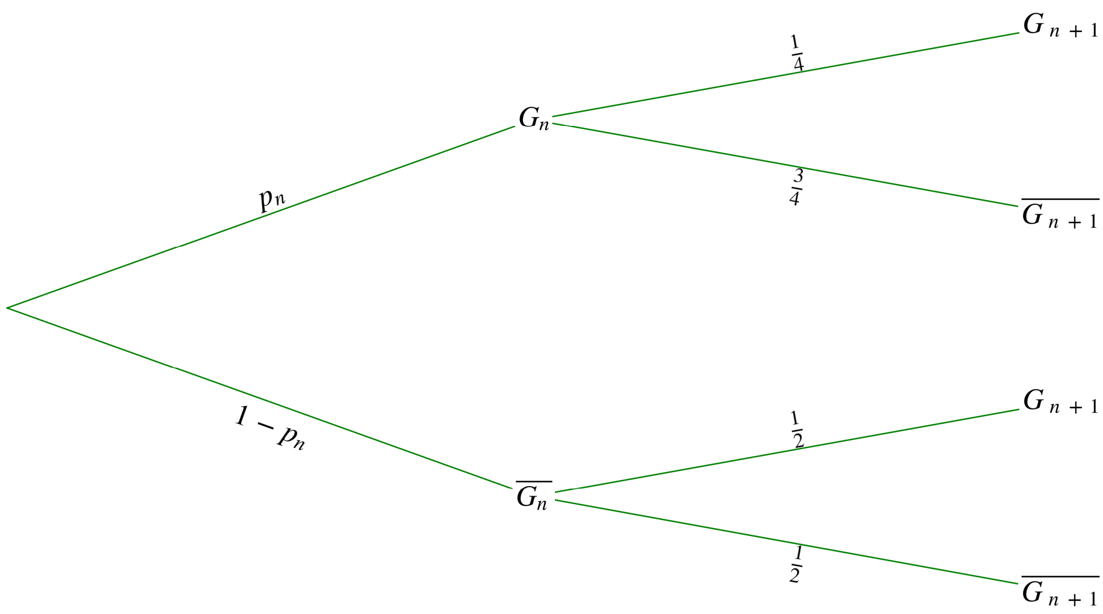
EXERCICE 5 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1. $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n)\times\frac{1}{2}$

$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n$ donc $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.



3. D'après les premières valeurs de p_n, on peut supposer que (p_n) converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc $p_n = u_n + \frac{2}{5}$ or $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$ donc en remplaçant : $u_{n+1} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}$

soit $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$ donc $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5}$ soit $u_1 = -\frac{3}{20}$ donc $u_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

b. $p_n = u_n + \frac{2}{5}$ et $u_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ donc pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5}$. Sur un grand nombre de parties, la probabilité qu'un joueur gagne une partie est 0,4.

EXERCICE 5 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 1 à n :
    C ← A + B
    A ← B
    B ← C
Fin Pour
```

Il y a une erreur de décalage, si i commence à 2, toutes les valeurs de a_n sont décalées de 1

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^5 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p+1}\, a_{q+1} + a_p\, a_q & a_{p+1}\, a_q + a_p\, a_{q-1} \\ a_p\, a_{q+1} + a_{p-1}\, a_q & a_p\, a_q + a_{p-1}\, a_{q-1} \end{pmatrix}$

$A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$ donc par identification des coefficients rouges : $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$.

Si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise toute combinaison linéaire de ces nombres en particulier $a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$, donc r divise également a_{p+q}.

Montrons par récurrence que a_p divise a_{np}.

Initialisation : Si $n = 1$: la propriété est vérifiée : a_p divise a_{1p}.

Hérédité : Montrons pour tout entier n non nul que si a_p divise a_{np} alors a_p divise $a_{(n+1)p}$.

$a_{(n+1)p} = a_{np+p}$, a_p divise a_{np} et a_p divise a_p donc a_p divise a_{np+p}, soit a_p divise $a_{(n+1)p}$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

4. *a.* Si n n'est pas un nombre premier, il existe un entier p différent de 1 et n tel que p divise n donc tel que $n = p\,q$ ($q \in \mathbb{N}$)

$n \geq 5$ donc q est non nul, donc d'après la question précédente a_p divise a_{pq}

b. La réciproque de « si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier » est « si a_n n'est pas nombre premier, alors n n'est pas un nombre premier ».

$a_{19} = 4181 = 37 \times 113$ donc a_{19} n'est pas un nombre premier et 19 est un nombre premier donc la réciproque est fausse.