I :ROC: Soit A, B, A', B' tels que A $\neq$B et A' $\neq$B'. Démontrer qu'il existe une unique similitude transformant A en A' et B en B'.

II: Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z'= \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1. Quelle est l'image de A par S ?
2. Quelle est l'affixe du point B tel que S(B) = O.
3. Prouver que pour tout M différent de A, AMM' est un triangle rectangle en M'.
4. En déduire une construction au compas du point M', A et M étant données.

CORRECTION

I :ROC:

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a\,z + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Il s'agit donc de déterminer, s'ils existent, a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$ tels que $z_{A'} = a\,z_A + b$ et $z_{B'} = a\,z_B + b$

par différence membre à membre : $a\,(z_A - z_B) = z_{A'} - z_{B'}$, A $\neq$ B donc $z_A \neq z_B$ donc $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$

A' $\neq$ B' donc $z_{A'} - z_{B'} \neq 0$ donc $a \neq 0$.

$$\begin{cases} z_{A'} = a\,z_A + b \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B\,z_{A'} = a\,z_B\,z_A + b\,z_B \\ z_{B'}\,z_A = a\,z_B\,z_A + b\,z_A \end{cases}$$

donc par différence membre à membre : $b = \frac{z_{A'}\,z_B - z_{B'}\,z_A}{z_A - z_B}$.

Si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que A $\neq$ B et A' $\neq$ B' alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

II: 1. $z_{A'} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_A + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\times 2 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 2$ donc A est invariant par S donc A est le centre de S.

2. $z_{B'} = 0 \Leftrightarrow \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow (3 + i\sqrt{3})\,z + 2\,(1 - i\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{2\,(1-i\sqrt{3})}{3+i\sqrt{3}}$

$z = \frac{2\,(1-i\sqrt{3})\,(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$ donc l'affixe de B est $\frac{2\,(3-i\sqrt{3}\ -3i\sqrt{3}-3)}{12} = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$

3. $z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z - \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\,(z-2)$

$z' - z = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}\,(z-2)$

si $z \neq 2$ alors $\frac{z'-2}{z'-z} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{-1+i\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\,i$

donc $\arg\left(\frac{z'-2}{z'-z}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc $(\overrightarrow{M'M}\,;\overrightarrow{M'A}\,) = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc si M $\neq$ A, le triangle AMM' est rectangle en M'.

4. S est une similitude directe de centre A, de rapport $\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'angle $\arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)$ donc $\frac{\pi}{6}$

donc $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AM'}\,) = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Construisons le triangle équilatéral direct AMM", la hauteur issue de A est également médiane et bissectrice de l'angle $\widehat{MAM''}$.

Si P est le milieu de [MM"] alors $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AP}\,) = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et AP = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ AM donc P = M'

donc M' est le milieu de [AM"]