

Amérique du Nord Juin 03

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. On rappelle que: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- c. En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.
 - a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$
 - b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
3. a. Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer les asymptotes à la courbe C et la courbe C.

CORRECTION

1. a. Soit $h = e^x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) = \frac{\ln(1+h)}{h}$ or $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

b. $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) = e^{-x} \ln\left(e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right) = e^{-x} [\ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x})] = e^{-x} [x + \ln(1 + e^{-x})]$

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}).$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C en $+\infty$

2. a. g est définie continue dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et $g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = -\frac{t}{(1+t)^2}$ donc $g'(t) \leq 0$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

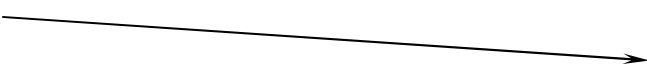
b. $g(0) = 0$ et g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ donc si $t > 0$, $g(t) < g(0)$ soit $g(t) < 0$

3. a. $f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} = e^{-x} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x) \right]$

$$f'(x) = e^{-x} g(e^x)$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} et pour tout $t > 0$, $g(t) < 0$ donc $g(e^x) < 0$ donc $f'(x) < 0$

b. Pour tout x réel, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R}

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
f	1		0

4.

