

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \frac{a}{1 + b e^{-0,04t}}$, où a et b sont des constantes réelles

positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1 m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2 m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 250]$ par $f(t) = \frac{2}{1 + 19 e^{-0,04t}}$.

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 250]$.

2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5 m$.

3. a. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a :

$$f(t) = \frac{2 e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}.$$

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par :

$$F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$$

est une primitive de la fonction f .

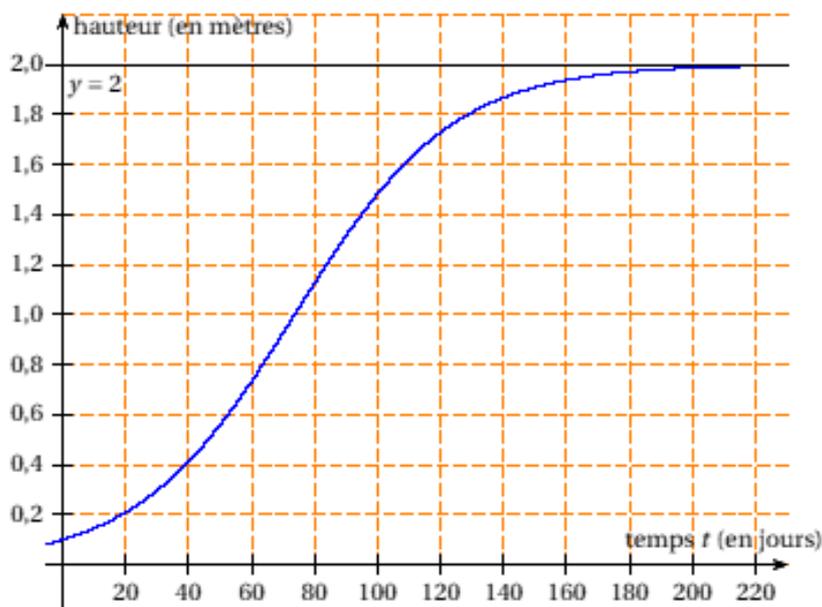
b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$.

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f .

La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t .

En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



CORRECTION

Partie 1

Initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1 m$ donc $h(0) = 0,1$ soit $\frac{a}{1 + b} = 0,1$ soit $10a = 1 + b$

Sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2 m$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$ d'où le système $\begin{cases} 10a - b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ donc $a = 2$ et $b = 19$

$$h(t) = \frac{2}{1 + 19 e^{-0,04t}}$$

Partie 2

1. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , la dérivée de la fonction $\frac{1}{u}$ est $-\frac{u'}{u^2}$; la dérivée de la fonction e^v est $v' e^v$.

$$\begin{aligned} \text{ici } v(t) &= e^{-0,04t} & \text{donc } v'(t) &= -0,04 e^{-0,04t} \\ u(t) &= 1 + 19 e^{-0,04t} & \text{donc } u'(t) &= -0,04 \times 19 e^{-0,04t} \\ f'(t) &= \frac{2 \times (-0,04 \times 19 e^{-0,04t})}{(1 + 19 e^{-0,04t})^2} & \text{soit } f'(t) &= \frac{-1,52 e^{-0,04t}}{(1 + 19 e^{-0,04t})^2} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} donc $f'(t) < 0$ sur $[0 ; 250]$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 250]$.

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à $1,5 \text{ m} \Leftrightarrow h(t) > 1,5$

$$\frac{2}{1 + 19 e^{-0,04t}} > 1,5 \Leftrightarrow 2 > 1,5 (1 + 19 e^{-0,04t}) \Leftrightarrow 2 > 1,5 + 28,5 e^{-0,04t}$$

$$\Leftrightarrow 0,5 > 28,5 e^{-0,04t} \Leftrightarrow e^{-0,04t} < \frac{0,5}{28,5} \Leftrightarrow e^{0,04t} > \frac{28,5}{0,5}$$

$$\Leftrightarrow e^{0,04t} > 57 \Leftrightarrow 0,04t > \ln 57 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 57}{0,04}$$

Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à $1,5 \text{ m}$ après 102 jours

3. a. pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19 e^{-0,04t}} = f(t) = \frac{2 e^{0,04t}}{(1 + 19 e^{-0,04t}) e^{0,04t}} \text{ donc } f(t) = \frac{2 e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$$

Si u est une fonction strictement positive, dérivable sur un intervalle I , la dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$.

donc $F'(t) = 50 \frac{0,04 e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = \frac{2 e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = f(t)$ donc la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par : $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .

b. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$ est :

$$V_m = \frac{1}{100 - 50} \int_{50}^{100} f(t) dt = \frac{1}{50} [F(100) - F(50)]$$

$$V_m = \frac{1}{50} [50 \ln(e^{0,04 \times 100} + 19) - 50 \ln(e^{0,04 \times 50} + 19)] \text{ donc}$$

$$V_m = \ln(e^4 + 19) - \ln(e^{0,2} + 19) \text{ soit } V_m \approx 1,03$$

$h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres

V_m désigne la hauteur moyenne d'un plant entre 50 et 100 jours donc, pendant la période située entre le 50^{ème} et le 100^{ème} jour, la hauteur moyenne d'un plant est de $1,03 \text{ m}$

4. $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente en x_0 à la courbe de f

Graphiquement, pour $x_0 \in [0 ; 75]$, ces tangentes ont un coefficient directeur qui croît et pour $x_0 \in [75 ; 250]$ ce coefficient directeur décroît donc la vitesse de croissance est maximale pour $t = 75$.

La vitesse maximale est alors d'environ $\frac{0,7}{25}$ soit environ $0,03$, la

hauteur du plant est environ de $1,02 \text{ m}$.

