On considère un triangle ABC, A', B' et C' désignent les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
G est le centre de gravité de ABC, O le centre du cercle circonscrit à ABC et H est l'orthocentre de ABC.
BUT : Montrer que les O, G et H sont alignés (la droite les joignant est appelée « droite d'Euler »).
On considère l'homothétie *h* de centre G et de rapport (– 2)

1. Déterminer les images des points A', B' et C' par *h*.
2. Démontrer que les images des médiatrices de [BC] et de [AC] sont des droites remarquables du triang1e.

En déduire l'image de O par *h* puis conclure.

CORRECTION

1. A' est le milieu de [BC] et G le centre de gravité du triangle ABC donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et donc $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$

donc $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GA'}$
A est l'image de A' par l'homothétie h de centre G de rapport – 2.
De même B est l'image de B' par h et C est l'image de C' par h.

2. L'image de la médiatrice Δ de (BC) par h est une droite δ parallèle à Δ, A' appartient à Δ donc son image appartient à δ or h(A') = A donc δ est la parallèle à Δ passant par A c'est donc la droite perpendiculaire en A à (BC) donc la hauteur issue de A du triangle ABC.

De même en utilisant le point B', la médiatrice de [AC] a pour image par h la hauteur issue de B du triangle ABC.

3. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc est l'intersection des médiatrices de [BC] et de [AC].

h(O) appartient donc à l'image par h de ces deux droites c'est-à-dire aux hauteurs issues l'une de A l'autre de B du triangle ABC donc h'O) est l'orthocentre du triangle ABC, h(O) = H
Le centre de l'homothétie, un point O et son image H par cette homothétie sont 3 points alignés donc O, G et H sont alignés.