Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit S la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = 5\,i\,z + 6\,i + 4$.

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.
2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'. Démontrer que $\begin{cases} x' = -5\,y + 4 \\ y' = 5\,x + 6 \end{cases}$.

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que

$$-3 \leq x \leq 5 \text{ et } -3 \leq y \leq 5.$$

On note (E) l'ensemble de ces points M.
On rappelle que les coordonnées (x', y') du point M', image du point M par la transformation S, sont $x' = -5\,y + 4$ et $y' = 5\,x + 6$.

1. *a*. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que :

$$4\,a + 3\,b = 5.$$

b. En déduire l'ensemble des points M de (E) de coordonnées $(x ; y)$ tels que $-3\,x' + 4\,y' = 37$.

2. Soient M un point de l'ensemble (E) et M' son image par la transformation S.

a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.

b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.

En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c. Déterminer l'ensemble des points M de (E) tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

CORRECTION

Partie A

1. L'écriture complexe de S est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$ donc S est une similitude directe de rapport $|\,a\,| = 5$ et d'angle arg a soit $\dfrac{\pi}{2}$.

Le centre de S est le point invariant de S donc son affixe est solution de $z' = z$

$z = 5\,i\,z + 6\,i + 4 \Leftrightarrow z\,(1 - 5\,i) = 4 + 6\,i \Leftrightarrow z = \dfrac{4+6\,i}{1-5\,i} = \dfrac{(4+6\,i)(1+5\,i)}{(1-5\,i)(1+5\,i)} = \dfrac{4+20\,i+6\,i-30}{1+5^2} = \dfrac{-26+26\,i}{26} \Leftrightarrow z = -1 + i$

Le centre de S est le point d'affixe $-1 + i$.

2. $z' = x' + i\,y' = 5\,i\,(x + i\,y) + 6\,i + 4 \Leftrightarrow x' + i\,y' = 5\,i\,x - 5\,y + 6\,i + 4 \Leftrightarrow x' + i\,y' = (-5\,y + 4) + i\,(5\,x + 6)$

$-5\,y + 4 \in \mathbb{R}$ et $5\,x + 6 \in \mathbb{R}$

Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales donc $\begin{cases} x' = -5\,y + 4 \\ y' = 5\,x + 6 \end{cases}$

Partie B

1. *a*. $4 - 3 = 1$ donc $4 \times 5 - 3 \times 5 = 5$

$\begin{cases} 4\,a + 3\,b = 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times (-5) = 5 \end{cases}$ donc par soustraction terme à terme : $4\,(a - 5) + 3\,(b + 5) = 0$

$4\,(a - 5) = -3\,(b + 5)$ donc 4 divise $-3\,(b + 5)$ or 4 est premier avec 3 donc d'après le théorème de Gauss 4 divise $b + 5$, il existe un entier relatif k tel que $b + 5 = 4\,k$

En remplaçant dans $4\,(a - 5) = -3\,(b + 5)$ alors $4\,(a - 5) = -3 \times 4\,k$ donc $a - 5 = -3\,k$

$a = -3\,k + 5$ et $b = 4\,k - 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Vérification :
$4\,a + 3\,b = 4\,(-3\,k + 5) + 3\,(4\,k - 5) = -12\,k + 20 + 12\,k - 15$
$4\,a + 3\,b = 5$ donc les solutions de l'équation $4\,a + 3\,b = 5$ sont les couples
$(-3\,k + 5 ; 4\,k - 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. $-3\,x' + 4\,y' = 37 \Leftrightarrow -3\,(-5\,y + 4) + 4\,(5\,x + 6) = 37 \Leftrightarrow 15\,y - 12 + 20\,x + 24 = 37 \Leftrightarrow 15\,y + 20\,x + 25 \Leftrightarrow 3\,y + 4\,x = 5$

$\Leftrightarrow x = -3\,k + 5$ et $y = 4\,k - 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$-3 \leq x \leq 5$ donc $-3 \leq -3\,k + 5 \leq 5$ soit $0 \leq 3\,k \leq 8$ donc $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$
et $-3 \leq y \leq 5$ donc $-3 \leq 4\,k - 5 \leq 5$ soit $2 \leq 4\,k \leq 10$ donc $k \in \{1 ; 2\}$
k doit vérifier les deux conditions donc $k = 1$ ou $k = 2$
Si $k = 1$, $x = -3\,k + 5 = 2$ et $y = 4\,k - 5 = -1$
Si $k = 2$, $x = -3\,k + 5 = -1$ et $y = 4\,k - 5 = 3$

L'ensemble des points M tels que $-3\,x' + 4\,y' = 37$ est donc réduit aux points A(2 ; – 1) et B(– 1 ; 3).
A l'intérieur du carré limité par $-3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 5$, la droite d'équation $3\,y + 4\,x = 5$ ne passe que par deux points à coordonnées entières A et B.

2. *a.* $x' + y' = (-5y+4) + (5x+6) = 5(x-y+2)$
$x-y+2$ est un entier relatif donc $5(x-y+2)$ est un multiple de 5.
$x' + y'$ est un multiple de 5.
b. $x' + y' = 5(x-y+2)$
or $5 \equiv 1$ [2] et $x-y+2 \equiv x-y$ [2] donc $5(x-y+2) \equiv x-y$ [2]
donc $x'-y' \equiv x'+y'$ modulo 2.

$x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 $\Leftrightarrow$ 2 divise $x'^2 - y'^2$
$\Leftrightarrow$ 2 divise $(x'+y')(x'-y')$
2 est un nombre premier donc soit 2 divise $x'+y'$ soit 2 divise $x'-y'$
soit $x'+y' \equiv 0$ modulo 2 soit $x'-y' \equiv 0$ modulo 2.
$x'-y' \equiv x'+y'$ modulo 2 donc
si $x'+y' \equiv 0$ modulo 2 alors $x'-y' \equiv 0$ modulo 2.
si $x'-y' \equiv 0$ modulo 2 alors $x'+y' \equiv 0$ modulo 2.
donc si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x'-y'$ et $x'+y'$ le sont également.

c. $x'^2 - y'^2 = (x'+y')(x'-y')$
$x'+y' = 5(x-y+2)$
$x'-y' = -5(x+y)+2$
$x'^2 - y'^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x-y+2)[-5(x+y)+2] = 20$
$\Leftrightarrow (x-y+2)[-5(x+y)+2] = 4$
$x-y+2$ est un diviseur de 4 donc $x-y+2 \in \{-4\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;4\}$
d'où les possibilités :

$x-y+2$	-4	-2	-1	1	2	4
$-5(x+y)+2 = \dfrac{4}{x-y+2}$	-1	-2	-4	4	2	1

$x-y$	-6	-4	-3	-1	0	2
$5(x+y)$	3	4	6	-2	0	1

seul 0 est divisible par 5 donc $\begin{cases} x-y=0 \\ 5(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$

(E) est réduit au point O.