Antilles-Guyane septembre 2013

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?

2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?

3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
    Affecter à X la valeur X – 26
Fin du tant que
Afficher X
```

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

• **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

• **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \quad (26) \\ z_2 \equiv y_2 \quad (26) \end{cases}$ avec $0 \leq z_1 \leq 25$ et $0 \leq z_2 \leq 25$

• **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : RE $\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP. Le bloc RE est donc codé en DP.

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$.

b. En déduire que $x_1 \equiv x'_1 \quad (26)$ et $x_2 \equiv x'_2 \quad (26)$ puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \quad (26) \\ x_2 \equiv y_2 \quad (26) \end{cases}$ avec $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x_2 \leq 25$

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \quad (26) \\ x_2 \equiv y'_2 \quad (26) \end{cases}$ avec $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x_2 \leq 25$

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26) \end{cases}$. Conclure.

4. Décoder QC.

CORRECTION

Partie A

1. A = 3, on affecte à X la valeur 3, X < 3 donc l'algorithme affiche 3

2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4
X	55	55 – 26 = 29	29 – 26	3
X ≥ 26	Oui	Oui	Oui	Non

L'algorithme affiche 3

3. Pour un nombre entier saisi quelconque, l'algorithme retranche un certain nombre de fois 26 jusqu'à ce que le nombre obtenu soit strictement inférieur à 26

L'algorithme effectue donc le calcul $A - 26n = r$ avec $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq r \leq 25$, il permet donc de calculer le reste de la division de A par 26.

Partie B

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 17+4 \\ 5\times 17+2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51+4 \\ 85+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$.

$55 = 2 \times 26 + 3$ donc $55 \equiv 3$ (26) et $93 = 3 \times 26 + 15$donc $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. *a.* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 \\ y_2 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$ or $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \quad (26) \\ z_2 \equiv y_2 \quad (26) \end{cases}$ avec $0 \leq z_1 \leq 25$ et $0 \leq z_2 \leq 25$ donc $\begin{cases} z_1 = 3x_1 + x_2 \quad (26) \\ z_2 = 5x_1 + 2x_2 \quad (26) \end{cases}$

$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y'_1 = 3x'_1 + x'_2 \\ y'_2 = 5x'_1 + 2x'_2 \end{cases}$ or $\begin{cases} z_1 \equiv y'_1 \quad (26) \\ z_2 \equiv y'_2 \quad (26) \end{cases}$ avec $0 \leq z_1 \leq 25$ et $0 \leq z_2 \leq 25$ donc $\begin{cases} z_1 = 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ z_2 = 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$

$\begin{cases} z_1 = 3x_1 + x_2 \quad (26) \\ z_2 = 5x_1 + 2x_2 \quad (26) \end{cases}$ et $\begin{cases} z_1 = 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ z_2 = 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$ donc $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \equiv 6x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \quad (26) \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $x_1 \equiv x'_1 \quad (26)$

En remplaçant dans $3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \quad (26)$, puisque $x_1 \equiv x'_1 \quad (26)$ alors $x_2 \equiv x'_2 \quad (26)$.

$0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x'_1 \leq 25$ donc $-25 \leq x_1 - x'_1 \leq 25$

$x_1 \equiv x'_1 \quad (26)$ donc $x_1 - x'_1$ est un multiple de 26 or le seul multiple de 26 compris entre – 25 et 25 est 0 donc $x_1 - x'_1 = 0$ soit $x_1 = x'_1$.

De même $x_2 = x'_2$.

2. *a.* $CC' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2-5 & -1\times 3+3 \\ 5\times 2-5\times 2 & -5+2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de *C*.

b. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3-15 \\ -5\times 3+3\times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$

c. $-9 \equiv 26$ 9 (26) donc $-9 \equiv 17$ (26)

$30 = 26 + 4$ donc $30 \equiv 4$ (26) donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$

d. Le bloc DP *a* été décodé en RE, on peut donc conjecturer la procédure de décodage suivante :

• **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau de l'étape 1 du codage.

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où z_1 correspond à la première lettre du mot et z_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

• **Étape 2** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \quad (26) \\ x_2 \equiv y_2 \quad (26) \end{cases}$ avec $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x_2 \leq 25$

• **Étape 4** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

3. $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y'_1 = 2z_1 - z_2 \\ y'_2 = -5z_1 + 3z_2 \end{cases}$ or $\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \quad (26) \\ x_2 \equiv y'_2 \quad (26) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1 = 2z_1 - z_2 \quad (26) \\ x_2 = -5z_1 + 3z_2 \quad (26) \end{cases}$

$3x_1 + x_2 \equiv 3(2z_1 - z_2) + (-5z_1 + 3z_2) \quad (26)$ soit $3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26)$

$5x_1 + 2x_2 \equiv 5(2z_1 - z_2) + 2(-5z_1 + 3z_2) \quad (26)$ soit $5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26)$ donc $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26) \end{cases}$.

On a multiplié $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par C' pour obtenir $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$, puis on a pris les restes module 26 de y'_1 et y'_2 pour obtenir enfin $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Puisque x_1 et x_2 vérifient $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \quad (26) \end{cases}$, alors en codant $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on retrouve $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est bien la forme décodée de $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

4. $\text{QC} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow C' \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -74 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{EE}$