Pondichéry avril 2014

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que $P(X \leq 2) = 0{,}15$.

Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. *a*. Déterminer $P(X \geq 3)$.

b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

3. Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}

L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1 : Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

2. g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.

Proposition 2 : Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a >une unique solution : $\frac{e-1}{2}$.

Proposition 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$,

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

P et **R** sont les plans d'équations respectives $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.

Proposition 4 : Les plans **P** et **R** se coupent perpendiculairement.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout entier naturel n on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. *a*. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

***b*.** En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

***c*.** Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que R > P
	    n prend la valeur $n + 1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$R
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

***a*.** Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour P = 0,5 ?

***b*.** Pour P = 0,01 on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

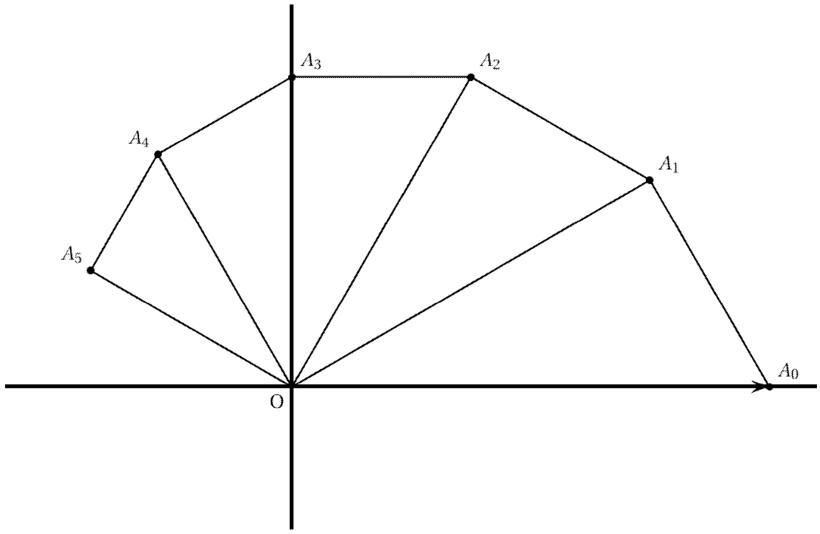
4. *a.* Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n\, e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée en annexe à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

Les traits de construction seront apparents.



EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi la spécialité

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel. On note :

X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n »,

Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,

Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n. La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition. Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,

40 % de chance d'acheter la marque Y,

10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,

50 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,

10 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. *a.* Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n

On admet que : $y_{n+1} = 0{,}4\,x_n + 0{,}3\,y_n + 0{,}2\,z_n$ et que $z_{n+1} = 0{,}1\,x_n + 0{,}2\,y_n + 0{,}7\,z_n$.

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et j des entiers naturels. A, B et U des matrices R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant Que $i < n$ U prend la valeur A × U + B i prend la valeur i + 1 Fin Tant Que
Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice I – A.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$. En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

4. On note V la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

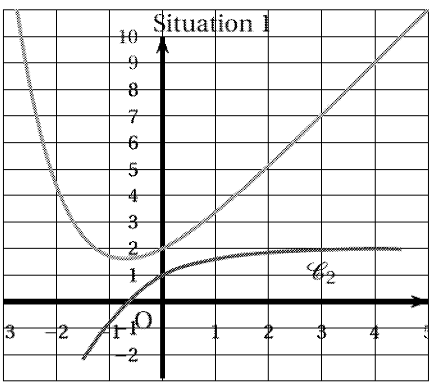
f est une fonction définie et dérivable sur ℝ. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

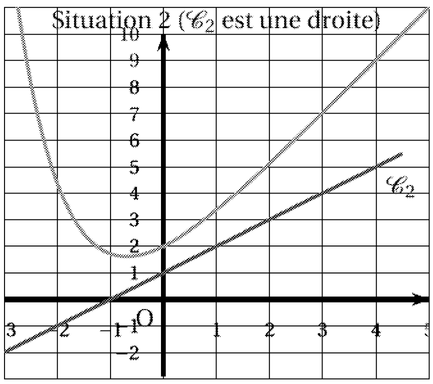
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathbf{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathbf{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

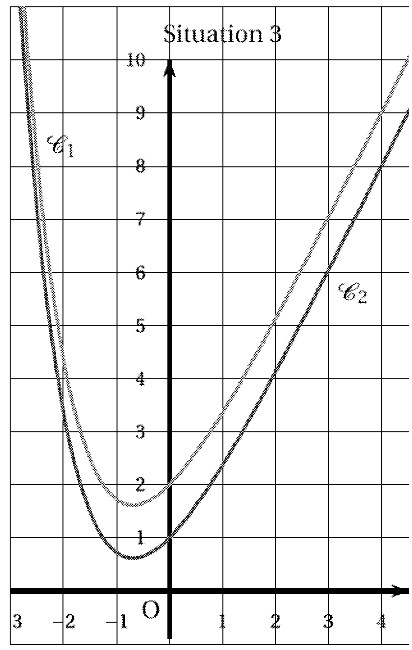
Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathbf{C}_1$.

Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathbf{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.







2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathbf{C}_1$ en A.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + a\,x + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

b. Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

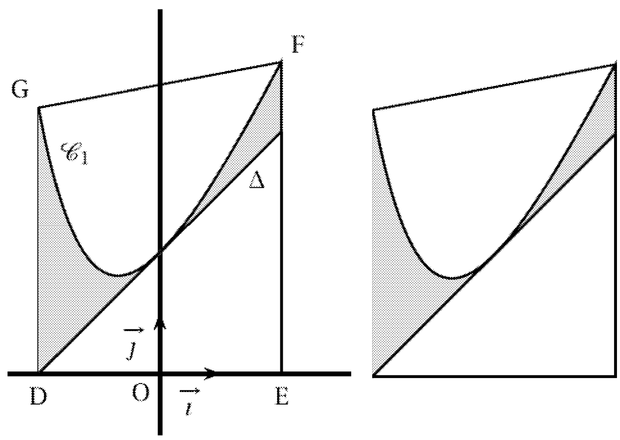
Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. ***a.*** Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la position de la courbe $\mathbf{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathbf{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.



Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$,
- E est le point de coordonnées $(2;\,0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathbf{C}_1$
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathbf{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathbf{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$P(X \leq 2) = 0{,}15$ donc $1 - e^{-2\lambda} = 0{,}15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 1 - 0{,}15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0{,}85 \Leftrightarrow -2\lambda = \ln 0{,}85 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}85}{2}$

2. *a.* $P(X \geq 3) = e^{-3 \times 0{,}081}$ soit environ 0,78.

b. $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \dfrac{P((X \geq t) \cap (X \geq t+h))}{P(X \geq t)} = \dfrac{P((X \geq t+h))}{P(X \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$.

c. $P_{(X \geq 3)}(X \geq 4 + 2) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

d. $E(X) = \lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$. Soit $F(x) = (a x + b) e^{-\lambda x}$, et $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, déterminons les réels a et b pour que F soit une primitive de f. F est une primitive de $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$F'(x) = a e^{-\lambda x} - (a x + b) \lambda e^{-\lambda x} \Leftrightarrow F'(x) = (-\lambda a x + a - \lambda b) \lambda e^{-\lambda x} \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a\lambda = \lambda \\ a - b\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$ et $b = -\dfrac{1}{\lambda}$.

$F(x) = \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$ donc $\displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} - \left(-\dfrac{1}{\lambda}\right) e^0 = \dfrac{1}{\lambda} + t e^{-\lambda t} - \dfrac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} t e^{-\lambda t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \dfrac{1}{\lambda}$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda} =$ soit environ 12,35

Interprétation : La durée de vie moyenne d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est 12,35 années.

3. $p = \dfrac{15}{800}$, $n = 800$ donc $n \geq 30$, $n p = 15$ donc $n p \geq 5$ et $n(1 - p) = 785$ donc $n(1 - p) \geq 5$ donc les conditions sont réunies

Intervalle de fluctuation au risque 1 % :

$p(-u \leq T \leq u) = 1 - 0{,}01 \Leftrightarrow u = 2{,}58$

$I = \left[p - 2{,}58\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 2{,}58\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \right]$ avec

$I = [\,0{,}006 \,;\, 0{,}032\,]$

$p = \dfrac{15}{800} = 0{,}01875$ donc $p \in I$ donc le résultat de ce test ne remet pas en question l'annonce de l'entreprise A.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. Proposition 1 : Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$. **FAUX**

Une suite croissante majorée converge.

Exemple : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_n \geq 0$ de plus $n + 1 > n$ donc $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ donc $-\dfrac{1}{n+1} > -\dfrac{1}{n}$ donc $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est croissante et converge vers 1

2. Proposition 2 : Sur $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{e-1}{2}$ **FAUX**

$g(x) = 2x \Leftrightarrow 2x \ln(2x + 1) = 2x \Leftrightarrow 2x[\ln(2x + 1) - 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln(2x + 1) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2x + 1 = e$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{e-1}{2}$, 0 et $\dfrac{e-1}{2}$ appartiennent à $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ admet deux solutions.

Proposition 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

VRAI

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$\begin{cases} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v(x) = \ln(2x+1) & v'(x) = \dfrac{2}{2x+1} \end{cases}$ donc $g'(x) = 2\ln(2x + 1) + 2x\dfrac{2}{2x+1}$ donc $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2 + 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2} = 1 + \ln 4$

3. **Proposition 4 :** Les plans **P** et **R** se coupent perpendiculairement. **VRAI**

Un vecteur normal au plan **P** est $\vec{n}\,(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$, un vecteur normal au plan **R** est $\vec{n'}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 5)$

$\vec{n}\,.\,\vec{n'} = 2\times 1 + 3\times 1 + (-1)\times 5 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux donc les plans **P** et **R** se coupent perpendiculairement.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

1. $\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right|^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$ donc $\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}$ est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. *a.* $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n$ donc $|z_{n+1}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,|z_n|$ donc $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, r_n$. La suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $z_0 = 1$ donc $r_0 = 1$, la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $r_n = r_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c. $\mathrm{OA}_n = r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ or $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$. La longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$ tend vers 0.

3. *a.*

n	0	1	2	3	4	5
R	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	$\dfrac{27}{16}$	$\dfrac{27\sqrt{3}}{32}$
Valeur approchée de R	1	0,866	0,750	0,650	0,563	0,487

Quand $n = 5$, R < P donc l'algorithme s'arrête, la valeur affichée est $n = 5$

b. Le rôle de l'algorithme est de déterminer la plus petite valeur de n, pour laquelle la distance OA_n est inférieure à P.

4. *a.* $z_{n+1} - z_n = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i} - 1\right) z_n = \left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n$ donc $|z_{n+1}-z_n|^2 = \left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{16}\right) r^2_{\mathrm{n}} = \dfrac{1}{4}\, r^2_{\mathrm{n}}$

$\mathrm{OA}_n = r_n$ et $\mathrm{OA}_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_n$ et $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, r^2_n$ donc $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}^2 = \dfrac{1}{4} r_n^2 + \dfrac{3}{4} r_n^2 = r_n^2$

donc $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}^2 = \mathrm{O\,A}_n^2$ donc (réciproque du théorème de Pythagore) le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. $z_n = r_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}) = \dfrac{n\pi}{6}$ à 2π près.

A_n est un point de l'axe des ordonnées si et seulement si $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_n})$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$ ou à $\dfrac{\pi}{2} + \pi$ à 2π près soit pour $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow n = 12k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) et $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow n = 12k + 9$ ($k \in \mathbb{N}$)

A_n est un point de l'axe des ordonnées $\Leftrightarrow n = 12k + 3$ ou $n = 12k + 9$ ($k \in \mathbb{N}$)

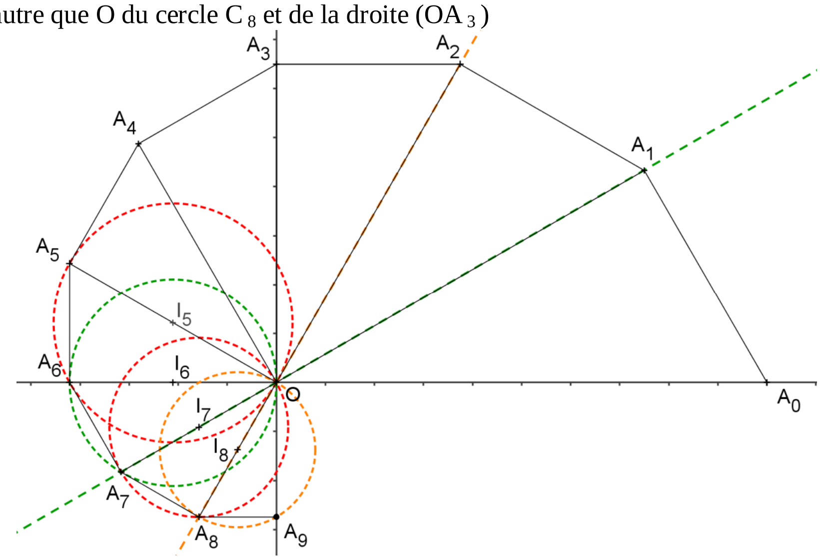
***c*.** Pour construire le point A_{n+1} connaissant le point A_n, il faut de déterminer le milieu I_n de $[\mathrm{OA}_n]$ puis de tracer le cercle C_n de diamètre $[\mathrm{OA}_n]$, le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} donc A_{n+1} est un point de ce cercle C_n.

L'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}) = \dfrac{n}{6}\pi$ donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_6}) = \pi$ à 2π près donc A_6 est un point intersection du cercle C_6 et de l'axe des abscisses distinct de O.

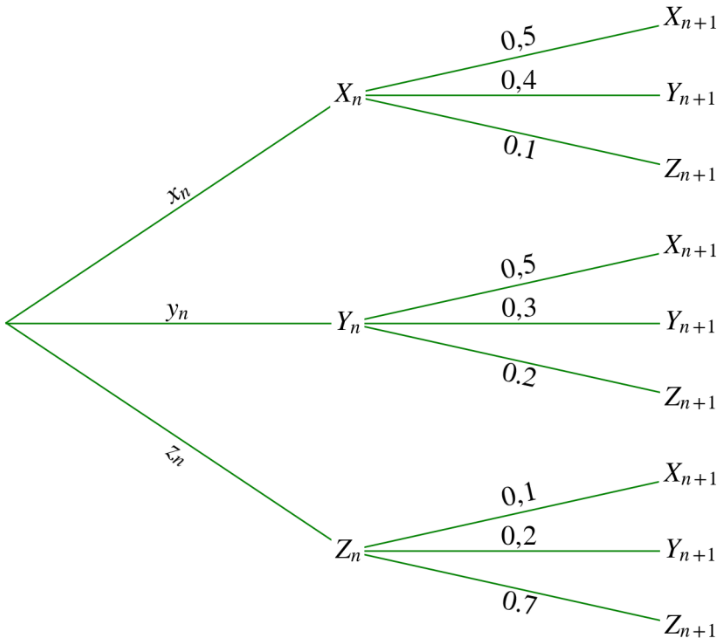
L'angle et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}) = \dfrac{n}{6}\pi$ donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}) = \dfrac{(n-6)\pi}{6} + \pi$ donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n-6}}) + \pi$

Les points A_6 et A_0 sont alignés et $\mathrm{O} \in [\mathrm{A}_0\mathrm{A}_6]$
Les points A_7 et A_1 sont alignés et $\mathrm{O} \in [\mathrm{A}_1\mathrm{A}_7]$
Les points A_8 et A_2 sont alignés et $\mathrm{O} \in [\mathrm{A}_2\mathrm{A}_8]$
Les points A_9 et A_3 sont alignés et $\mathrm{O} \in [\mathrm{A}_3\mathrm{A}_9]$
donc

A_6 est le point intersection autre que O du cercle C_5 et de la droite (OA_0)
A_7 est le point intersection autre que O du cercle C_6 et de la droite (OA_1)
A_8 est le point intersection autre que O du cercle C_7 et de la droite (OA_2)
A_9 est le point intersection autre que O du cercle C_8 et de la droite (OA_3)



EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi la spécialité



1. *a.* $x_{n+1} = 0{,}5\, x_n + 0{,}4\, y_n + 0{,}1\, z_n$
$y_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}3\, y_n + 0{,}2\, z_n$
$z_{n+1} = 0{,}1\, x_n + 0{,}2\, y_n + 0{,}7\, z_n$.

b. $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$

$x_{n+1} = 0{,}5\, x_n + 0{,}4\, y_n + 0{,}1\,(1 - x_n - y_n)$
soit $x_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}3\, y_n + 0{,}1$

$y_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}3\, y_n + 0{,}2\,(1 - x_n - y_n)$
soit $y_{n+1} = 0{,}2\, x_n + 0{,}1\, y_n + 0{,}2$

2. *a.* $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

i	0	1	2	3
U	$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}355 \\ 0{,}311 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}3353 \\ 0{,}3021 \end{pmatrix}$

Si $n = 1$, l’algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$

Si $n = 3$, l’algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0{,}3353 \\ 0{,}3021 \end{pmatrix}$

b. Avril correspond à $n = 3$ donc la probabilité d’utiliser la marque X au mois d’avril est 0,3353

3. *a.* $C = A \times C + B \Leftrightarrow C - A \times C = B \Leftrightarrow I \times C - A \times C = B \Leftrightarrow (I - A) \times C = B \Leftrightarrow N \times C = B$.

b. $N \times C = B \Leftrightarrow C = N^{-1} \times B \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{9{,}5}{23} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

4. *a.* $V_{n+1} = U_{n+1} - C = A \times U_n + B - C \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times U_n + B - (A \times C + B) \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times U_n - A \times C \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times (U_n - C) \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times V_n$

b. Mai correspond à $n = 4$, $U_4 = A^4 \times (U_0 - C) + C$ donc $U_4 = \begin{pmatrix} 0{,}32475 \\ 0{,}29727 \end{pmatrix}$

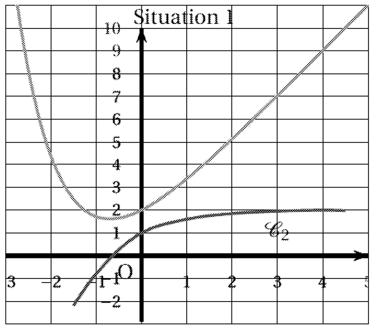
La probabilité que de l’événement « la marque X est utilisée au mois de mai » est 0,32475
Y_n l’évènement « la marque Y est utilisée au mois de mai » est 0,29727
Z_n l’évènement « la marque Z est utilisée au mois de mai » $1 - 0{,}32475 - 0{,}29727$ soit 0,37798

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. Dans la situation 1, la fonction f' est négative sur $]-\infty\,;\,\alpha\,]$ et positive sur $[\,\alpha\,;+\infty[$ avec $-1<\alpha<0$

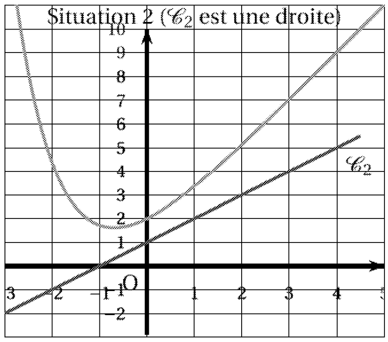
La fonction représentée par $\mathbf{C}_1$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha\,]$ et croissante sur $[\,\alpha\,;+\infty[$ avec $-1<\alpha<0$ donc la situation 1 peut convenir.



Dans la situation 2, la fonction f' est négative sur $]-\infty\,;-1\,]$ et positive sur $[-1\,;+\infty[$

La fonction représentée par $\mathbf{C}_1$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha\,]$ et croissante sur $[\,\alpha\,;+\infty[$ avec $-1<\alpha<0$ donc n'a pas pour dérivée la fonction représentée par $\mathbf{C}_2$.

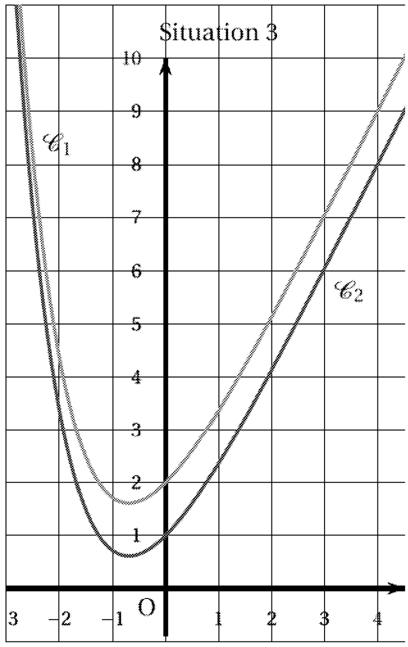
La situation 2 ne convient pas.



Dans la situation 3, la fonction f' est positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction représentée par $\mathbf{C}_1$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha\,]$ et croissante sur $[\,\alpha\,;+\infty[$ avec $-1<\alpha<0$ donc n'a pas pour dérivée la fonction représentée par $\mathbf{C}_2$.

La situation 3 ne convient pas.



2. L'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathbf{C}_1$ en A est $y=f'(0)\,(x-0)+f(0)$

$f'(0)=1$ et $f(0)=2$ donc l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathbf{C}_1$ en A est $y=x+2$

3. *a.* $f(0)=2$ donc $2=1+b$ donc $b=1$

b. $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+a$ or $f'(0)=1$ donc $1=-\mathrm{e}^{0}+a$ soit $a=2$

4. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+2x+1$, f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+2$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-x}+2\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln 2\geq -x \Leftrightarrow -\ln 2\leq x$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Partie B

1. *a.* $g(x) = \text{e}^{-x} + x - 1$, g est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\text{e}^{-x} + 1$

$-\text{e}^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > \text{e}^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x réel, $g(x) \geq g(0)$ soit $g(x) \geq 2 - 1$

pour tout x réel, $f(x) > x + 2$ donc la courbe $\mathbf{C}_1$ est toujours au dessus de la droite Δ.

2. La courbe $\mathbf{C}_1$ est toujours au dessus de la droite Δ, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ donc $\text{A} = \int_{-2}^{2} f(x)\,\text{d}x - \int_{-2}^{2} (x+2)\,\text{d}x$

$\text{A} = \int_{-2}^{2} [f(x) - (x+2)]\,\text{d}x$

$\text{A} = \int_{-2}^{2} (\text{e}^{-x} + x - 1)\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{2}$

$\text{A} = -\text{e}^{-2} + \frac{1}{2}2^2 - 2 - (-\text{e}^{2} + 2 + 2)$

$\text{A} = \text{e}^{2} - \text{e}^{-2} - 4$ unités d'aires soit environ 3,25 valeur arrondie à 10^{-2}.