Polynésie (septembre 2006) partiel

On pourra utiliser sans justification que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} = 0$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^3 - 4x^2)\, e^{-x}$

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)\, e^{-x}$

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction v sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$ (où $0 < a < b$).

Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{1}{a}\right]$.

b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.

Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

CORRECTION

1\. *a*. En écrivant $f(x) = 2x^3 e^{-x} - 4x^2 e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 e^{-x}$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} -4x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -4x^2 e^{-x} = -\infty$

les deux termes de la somme ont pour limite moins l'infini en $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

De la même façon en plus l'infini, les deux termes ont pour limite 0 (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, , $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1\. *b*. La dérivée de la fonction f est donnée par

$f'(x) = e^{-x}(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2) = e^{-x}(-2x^3 + 10x^2 - 8x) =$

$f'(x) = 2x\, e^{-x}(-x^2 + 5x - 4)$

1\. *c*. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, le signe de la dérivée est celui de $x(-x^2 + 5x - 4)$.

Le trinôme a pour racines 1 et 4, donc le signe de la dérivée dépend de la position de x par rapport aux nombres 0, 1 et 4. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x		$-$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↗	0	↘	$-2e^{-1}$	↗	$64e^{-4}$	↘	0

1\. *d*. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2\. *a*. v est la composée de la fonction inverse $x \to \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et à valeurs dans $[a\,;b]$ et de la fonction u, supposée croissante sur $[a\,;b]$. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction décroissante sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{1}{a}\right]$.

2\. *b*. Soit $X = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et f continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{X \to 0} f(X) = f(0) = 0$

Soit $X = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = 0$

2\. *c*. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

De même qu'au 2 *a*, on démontrerait que si u est décroissante, alors v est croissante.

f est décroissante sur $]\,0\,;1]$donc g est croissante sur $[1\,;+\infty[$

f est croissante sur $[1\,;4]$ donc g est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;1\right]$

f est décroissante sur $[1\,;+\infty\,[$ donc g est croissante sur $]\,0\,;1]$

x	0		1		1		$+\infty$
g	0	↗	$64e^{-4}$	↘	$-2e^{-1}$	↗	0