Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB = L et AD = 1 ($L > 1$).
Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.
On suppose qu'il existe une similitude directe f de rapport k telle que :

$$f(A) = B,\ f(B) = C,\ f(C) = E.$$

Partie A

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude f.
On appelle Ω le centre de la similitude f.
b. Déterminer l'image par la composée $f \circ f$ des points Ω, A et B.
c. Quelle est la nature de la transformation $f \circ f$? Préciser ses éléments caractéristiques.
d. En déduire que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).
3. a. Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f.
b. En déduire une construction du point E′, image du point E par la similitude f.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.
On appelle z l'affixe du point M, et z' l'affixe du point M′, image du point M par f.

1. Montrer que $z' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,i\,z + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
2. Déterminer l'image du point D par f.

CORRECTION

Partie A

1. $f(A) = B$ et $f(B) = C$, donc BC = k AB donc $1 = k\,L$
$f(B) = C$ et $f(C) = E$ donc CE = k BC

$L > 1$ et AFED est un carré donc CE = CD –DE = $L - 1$ donc $L - 1 = k$ donc L est vérifie $1 = L\,(L - 1)$ soit $L^2 - L - 1 = 0$

Résolvons $x^2 - x - 1 = 0$, $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5$ donc les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$, sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$L > 0$ donc $L = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. a. $f(A) = B$ et $f(B) = C$ donc l'angle de f est $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC})$

soit $\pi + (\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC})$ donc l'angle de f est $\pi - \dfrac{\pi}{2}$ soit $\dfrac{\pi}{2}$.

Le rapport de f est $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{L} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

soit $\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4}$ donc $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

b. Ω est le centre de la similitude f donc est invariant par f donc $f \circ f(\Omega) = f(\Omega) = \Omega$
$f(A) = B$ et $f(B) = C$ donc $f \circ f(A) = f(B) = C$
$f(B) = C$ et $f(C) = E$ donc $f \circ f(B) = f(C) = E$

c. f est une similitude directe de centre Ω, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de rapport $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $f \circ f$ est une similitude directe de centre Ω, d'angle $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ de rapport $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

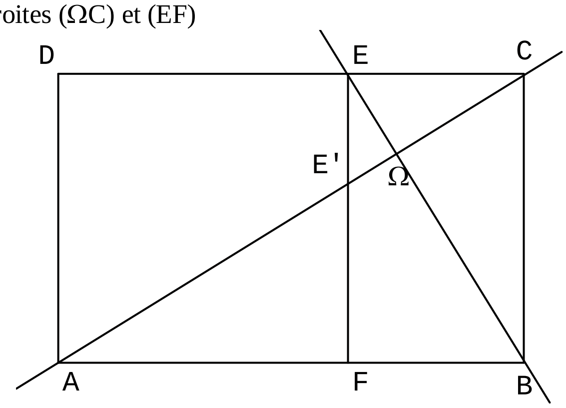
$f \circ f$ est une similitude directe de centre Ω, d'angle π de rapport $\dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{4}$ soit $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ donc $f \circ f$ est une homothétie de centre Ω, de rapport $-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

d. Par une homothétie, le centre de l'homothétie, un point différent du centre et son image sont alignés
$f \circ f$ est une homothétie et $f(A) = C$ donc Ω appartient à la droite (AC)
$f \circ f$ est une homothétie et $f(B) = E$ donc Ω appartient à la droite (BE)

Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3. *a.* Par la similitude f d'angle $\frac{3\pi}{2}$, une droite est transformée en une droite perpendiculaire, or f (C) = E donc l'image de la droite (CD) par la similitude f est la droite passant par E perpendiculaire à la droite (CD) donc est la droite (EF).

b. $f \circ f$ est une homothétie et f (C) = E donc $f \circ f$ (C) = E' donc les points Ω, C et E' sont alignés.
Le point E appartient à la droite (CD), par la similitude f d'angle $\frac{3\pi}{2}$, une droite est transformée en une droite perpendiculaire, or f (C) = E donc l'image de la droite (CD) par la similitude f est la droite passant par E perpendiculaire à la droite (CD) donc est la droite (EF).
E' est donc le point d'intersection des droites (ΩC) et (EF)



Partie B

1. f est une similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ de rapport $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

donc f a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ avec $|\,a\,| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et arg $a = \frac{\pi}{2}$ donc $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ soit $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}$

donc $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}\,z + b$, f (A) = B or A a pour affixe 0 et B a pour affixe L soit $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, donc $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i} \times 0 + b$

donc $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}\,z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. D a pour affixe i donc l'image du point D par f a pour affixe $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i} \times \mathrm{i} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ soit $z' = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

donc z' = 1 donc f (D) = F