ALGORITHMIQUE

On considère l'algorithme suivant :

Saisir un entier $N \geq 1$
Affecter à S la valeur 0
Affecter à I la valeur 0
Tant que $S < N$
Affecter à S la valeur $S + I^2$
Affecter à I la valeur $I + 1$
Fin de tant que
Afficher S
Afficher

34.	La valeur de S affichée pour N = 30 est :		
a.	14	***b.***	30
c.	55	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b.*

Variables	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
S	0	0	1	5	14	30
I	0	1	2	3	4	5

35.	La valeur de I affichée pour N = 30 est :		
a.	4	***b.***	5
c.	6	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b.*

36.	La plus petite valeur de N tel que I = 3 est :		
a.	1	***b.***	2
c.	3	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b.*

L'algorithme s'arrête dès que $S \geq N$,
à l'étape 1, $S = 2$ donc $2 < N$ et l'algorithme se poursuit
à l'étape 2, $S = 5$ donc $5 \geq N$ et l'algorithme s'arrête donc $2 < N \leq 5$ donc la plus petite valeur de N tel que $I = 3$ est $N = 3$

37.	La plus grande valeur de N tel que I = 3 est :		
a.	1	***b.***	3
c.	5	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c.*

L'algorithme s'arrête dès que $S \geq N$,
à l'étape 1, $S = 2$ donc $2 < N$ et l'algorithme se poursuit
à l'étape 2, $S = 5$ donc $5 \geq N$ et l'algorithme s'arrête donc $2 < N \leq 5$ donc la plus grande valeur de N tel que $I = 3$ est $N = 5$

LES COMPLEXES

38.	L'écriture exponentielle de $\sqrt{3} - i$ est :		
a.	$\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$	***b.***	$\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$
c.	$2\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$	***d.***	$2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

CORRECTION

Réponse *c.*

$| \sqrt{3} - i |^2 = 3 + 1 = 4$ donc $| \sqrt{3} - i | = 2$

$$\sqrt{3} - i = 2\,(\cos\theta + i \sin\theta) \text{ donc } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ donc } \sqrt{3} - i = 2\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

39	$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^9$ est		
a.	un réel strictement négatif	***b.***	un réel strictement positif
c.	un imaginaire pur	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.

$\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^9 = 2^9\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}9\frac{\pi}{6}} = 2^9\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = 2^9\,\mathrm{i}$

Dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe, on considère 1appllcation qui à tout point M d'affixe z où $z \neq 2$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{z+2}$.

40.	Si $z = -\mathrm{i}$ alors z' =		
a.	$\dfrac{-1}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$	***b.***	$\dfrac{-1}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$
c.	$\dfrac{-1}{2}+\mathrm{i}$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *a*.

$z' = \dfrac{-\mathrm{i}-1}{-\mathrm{i}+2} = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(-1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \dfrac{-2-\mathrm{i}-2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{4+1} = \dfrac{-2+1-3\mathrm{i}}{5}$ donc $z' = \dfrac{-1}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

41.	Si $z' = -\mathrm{i}$ alors z =		
a.	$\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$	***b.***	$\dfrac{-1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
c.	$\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b*.

$z' = \dfrac{z-1}{z+2}$ donc $z' = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z-1 = -\mathrm{i}\,(z+2) \Leftrightarrow z\,(1+\mathrm{i}) = 1-2\,\mathrm{i}$

$z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1-\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1+1} = \dfrac{1-2-3\mathrm{i}}{2}$ soit $z = \dfrac{-1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

42.	L'ensemble des points M tels que OM' = 1 est :		
a.	une droite privée d'un point	***b.***	un cercle privé d'un point
c.	une droite	***d.***	un cercle

CORRECTION

Réponse *c*.

OM' = 1 $\Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-1}{z+2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z+2|$

Soit les points A et B d'affixes respectives 1 et – 2

$|z-1| = |z+2| \Leftrightarrow$ MA = MB $\Leftrightarrow$M décrit la médiatrice de [AB]

43	L'ensemble des points M tels que $z' = -\overline{z'}$ est :		
a.	une droite privée d'un point	***b.***	un cercle privé d'un point
c.	une droite	***d.***	un cercle

CORRECTION

Réponse *b*.

$z' = -\overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z+2} = -\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+2} \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}+2) = -(z+2)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow z\,\overline{z} + 2\,z - \overline{z} - 2 = -(z\,\overline{z} - z + 2\,\overline{z} - 2)$ et $z \neq 2$

$\Leftrightarrow z\,\overline{z} + 2\,z - \overline{z} - 2 = -z\,\overline{z} + z - 2\,\overline{z} + 2$ et $z \neq 2 \Leftrightarrow z\,\overline{z} + z + \overline{z} - 4 = 0$ et $z \neq 2$

Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ alors $z\,\overline{z} + z + \overline{z} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\,x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2 = 5$ où Ω est le point de coordonnées (– 1 ; 0).

Le point A (2) appartient à ce cercle donc M décrit le cercle de centre Ω de coordonnées (– 1 ; 0) et de rayon $\sqrt{5}$ privé de A.

LA GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$A(0 ; -5; 0)$, $B(1 ; 0 ; 1)$, $C(-1 ; -7; 0)$ et $D(a ; 0 ; -1)$ où a est un réel

44.	Une équation du plan (ABC) est :		
a.	$3x + y + 2z + 5 = 0$	***b.***	$x + y - 6z + 5 = 0$
c.	$-2x + y - 3z + 5 = 0$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.

En remplaçant A, B et C par leurs coordonnées :

$3 \times 0 - 5 + 2 \times 0 + 5 \neq 0$ donc A n'appartient pas au plan d'équation : $3x + y + 2z + 5 = 0$

$0 - 5 - 6 \times 0 + 5 = 0$ donc A appartient au plan d'équation : $x + y - 6z + 5 = 0$
$1 + 0 - 6 \times 1 + 5 = 0$ donc B appartient au plan d'équation : $x + y - 6z + 5 = 0$
$-1 - 7 - 6 \times 0 + 5 \neq 0$ donc C n'appartient pas au plan d'équation : $x + y - 6z + 5 = 0$

$-2 \times 0 + 5 - 3 \times 0 + 5 = 0$ donc A appartient au plan d'équation : $-2x + y - 3z + 5 = 0$
$-2 \times 1 + 0 - 3 \times 0 + 5 = 0$ donc B appartient au plan d'équation : $-2x + y - 3z + 5 = 0$
$-2 \times (-1) - 7 - 3 \times 0 + 5 = 0$ donc C appartient au plan d'équation : $-2x + y - 3z + 5 = 0$
Le plan ABC a pour équation : $-2x + y - 3z + 5 = 0$

45	Le triangle ABD est rectangle en B lorsque $a =$		
a.	1	***b.***	3
c.	4	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b*.

$\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(-1 ; -5 ; -1)$

$\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(a - 1 ; 0 ; -2)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -(a-1) - 5 \times 0 - 1 \times (-2) = -a + 1 + 2 = 0$

Le triangle ABD est rectangle en B si $a = 3$

46.	Les droites (AD) et (BC) sont parallèles lorsque $a =$		
a.	$\dfrac{-10}{7}$	***b.***	$\dfrac{10}{7}$
c.	4	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d*.

$A(0 ; -5; 0)$, $B(1 ; 0 ; 1)$, $C(-1 ; -7; 0)$ et $D(a ; 0 ; -1)$

$\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(a ; 5 ; -1)$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2 ; -7 ; -1)$

Les droites (AD) et (BC) sont parallèles s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{BC}$, donc $\begin{cases} a = -2k \\ 5 = -7k \\ -1 = -k \end{cases}$, les conditions (2) et (3) sont incompatibles : $k = -\dfrac{5}{7}$ et $k = 1$. Les droites (AD) et (BC) ne sont jamais parallèles

47.	Le nombre de valeurs de a tel que $AD = BC$ est :		
a.	0	***b.***	1
c.	2	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.

$AD^2 = a^2 + 5^2 + (-1)^2$ et $BC^2 = (-2)^2 + (-7)^2 + (-1)^2$

$AD = BC \Leftrightarrow a^2 + 25 = 54 \Leftrightarrow a^2 = 29 \Leftrightarrow a = \sqrt{29}$ ou $a = -\sqrt{29}$

48.	$x^2 - 4x + y^2 + 3y = 4$ est une équation :		
a.	de cercle	***b.***	de sphère
c.	de plan	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d*.
L'équation d'un plan est de la forme $a x + b y + c z + d = 0$ donc réponse c fausse
L'équation d'une sphère est de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + a x + b y + c z + d = 0$ donc réponse b fausse
Un cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan donc a une équation de la forme : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a x + b y + c z + d = 0 \\ a' x + b' y + c' z + d' = 0 \end{cases}$
donc réponse a fausse.

49.	Une équation de la sphère de centre C et de rayon OA est :		
a.	$x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = -25$	***b.***	$x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = 25$
c.	$x^2 - 2x + y^2 - 14y + z^2 = -25$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *a*.
Soit $M(x ; y ; z)$ un point de la sphère de centre C et de rayon OA
$OA^2 = 25$ donc $MC^2 = 25 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 7)^2 + z^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 14y + 49 + z^2 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = 25 - 50 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = -25$

LES PROBABILITES
Soient A et B deux événements non impossibles, non certains et indépendants l'un de l'autre. De manière générale :

50	$P(A \cup B)$		
a.	$P(A) + P(B)$	***b.***	$P(A) \times P(B)$
c.	$P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$
$P(A \cup B) = P(A)\,[1 - P(B)] + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)$

51.	$P_B(\overline{A}) =$		
a.	$P_{\overline{B}}(A)$	***b.***	$1 - P(A)$
c.	$P(\overline{A} \cap B)$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b*.
$P_B(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants donc $P_B(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}) \times P(B)}{P(B)} = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $(8 ; 0,3)$;
Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-2 ; 1]$ et
Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

52.	$P(X = 1) - P(X = 7)$ est :		
a.	nul	***b.***	strictement négatif
c.	strictement positif	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.
$P(X = 1) - P(X = 7) = \binom{8}{1} 0,3^1 \times 0,7^7 - \binom{8}{7} 0,3^7 \times 0,7^1$
$P(X = 1) - P(X = 7) = 8 \times 0,3 \times 0,7^7 - 8 \times 0,3^7 \times 0,7$
$= 8 \times 0,3 \times 0,7\,[\,0,7^6 - 0,3^6\,]$
$0,7^6 - 0,3^6 > 0$ donc $P(X = 1) - P(X = 7) > 0$

53.	E(X) =		
a.	7,7	***b.***	8,3
c.	2,4	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.
E(X) = $n\,p$ = 8 × 0,3 = 2,4

54.	$P(-1 \leq Y \leq 2) =$		
a.	1	***b.***	$\frac{2}{3}$
c.	-1	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b*.
Y est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [– 2 ; 1] donc $P(-1 \leq Y \leq 2) = P(-1 \leq Y \leq 1)$

$$P(-1 \leq Y \leq 2) = \frac{\text{longueur du segment } [-1\,;1]}{\text{longueur du segment } [-2\,;1]} = \frac{2}{3}$$

55.	E(Y) = 3.		
a.	$-\frac{1}{3}$	***b.***	1
c.	$\frac{1}{3}$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d*.
Si Y est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [a ; b] alors E(Y) = $\frac{a+b}{2}$ donc E(Y) = $\frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$

56.	$P(Z < -2) - P(Z \geq 2)$:		
a.	est nul	***b.***	est strictement négatif
c.	est strictement positif	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *a*.
Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite donc $P(Z > a) = P(Z \leq -a)$ don $P(Z < -2) = P(Z \geq 2)$
donc $P(Z < -2) - P(Z \geq 2) = 0$

57.	E(Z) :		
a.	est nulle	***b.***	est strictement négative
c.	est strictement positive	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *a*.
Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite donc E(Z) = 0

LES STATISTIQUES

Mesdames Ave et Nir se présentent à une élection nationale. Un sondage effectué sur un échantillon de n personnes (où $n \geq 50$) donne 52% des suffrages à Ave et 48% à Nir.

Soit p la proportion des votants pour madame Ave

58.	Pour n = 400, un intervalle de confiance de p, au niveau 95% est :		
a.	[0,51 ; 0,53]	***b.***	[0,49 ; 0,55]
c.	[0,47 ; 0,57]	***d.***	[0,45 ; 0,59]

CORRECTION

Réponse *c*.

Un intervalle de confiance de p, $\left[\ p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}\ \right]$, soit $\left[\ 0{,}52-\frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}52-\frac{1}{\sqrt{400}}\ \right]$.

$\frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20}$ = 0,05 donc l'intervalle a pour bornes 0,52 – 0,05 et 0,52 + 0,05 soit [0,47 ; 0,57].

59.	Le nombre minimal de personnes interrogées permettant d'affirmer, au niveau 95% que madame Ave va être 60.		
a.	1 500	***b.***	2 000
c.	2 500	***d.***	3 000

CORRECTION

Réponse *c*.

Il faut que $p-\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0{,}5$ donc $0{,}52 - 0{,}5 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ soit $0{,}02 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n} \geq \frac{1}{0{,}02} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 50 \Leftrightarrow n \geq 2\,500$

60.	Pour obtenir une amplitude 2 fois plus petite de l'intervalle de confiance de p, il suffirait de multiplier le nombre initial de votants par :		
a.	$\frac{1}{4}$	***b.***	$\frac{1}{2}$
c.	2	***d.***	4

CORRECTION

Réponse *d*.

L'amplitude de l'intervalle de confiance est $p+\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$

Pour obtenir une amplitude 2 fois plus petite de l'intervalle de confiance de p, il faudrait multiplier $\sqrt{n}$ par 2 donc n par 4.