Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x - 9$

Soit l'algorithme

```
Variables :        a est un réel
                   b est un réel
                   m est un réel
                   precision est un réel
Initialisation :   Affecter à precision  la valeur 0.00001
                   Lire a
                   Lire b
Traitement :       Tant que b-a>precision faire
                     | m prend la valeur (a+b)/2
                     | si f(m)*f(b) > 0 alors
                     |     | debut si
                     |     |     b prend la valeur m
                     |     |     fin si
                     |     | sinon
                     |     |     debut sinon
                     |     |     a prend la valeur m
                     |     | fin sinon
                   Fin de tant que
Sortie :           afficher a
                   Afficher b
```

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, dresser le tableau de variation

2. *a.* Quel est le signe de f sur $]-\infty, 2]$ justifier

2. *b.* Quel est le signe de f sur $[3{,}5, +\infty[$

2. *c.* Quelle conjecture peut on faire sur le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$

3. Encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$

L'algorithme au dessus détermine un encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$

a. Donner les trois premiers encadrements obtenus par cette méthode en complétant le tableau suivant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4
a	2			
b	3,5			
$b - a$				
m				
signe de $f(m)\,f(b)$				

b. Déduire de l'algorithme un encadrement de α.

4. Valeur exacte de la solution de l'équation $f(x) = 0$

Le mathématicien Cardan trouva au 16$^{\text{ème}}$ siècle une méthode de résolution de l'équation du troisième degré.

Il établit que l'équation $x^3 = px + q$ admet pour solution le réel $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ lorsque le nombre $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$

a. Appliquer la méthode de Cardan à l'équation $x^3 = 6x + 9$

b. Vérifier que 4 est la solution de $x^3 = 15x + 4$, peut on dans ce cas utiliser la méthode de Cardan ? Justifier

CORRECTION

1. $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$4\sqrt{2} - 9$	$\searrow$	$-4\sqrt{2} - 9$	$\nearrow$	$+\infty$

f est un polynôme donc les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x)$ sont les mêmes que celles de x^3 donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. *a.* f est croissante sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\,\right]$ et décroissante sur $\left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,\right]$ donc f admet un maximum en $-\sqrt{2}$ sur $\left]-\infty\,;\sqrt{2}\,\right]$

$4\sqrt{2}-9<0$ donc pour tout x de $\left]-\infty\,;\sqrt{2}\,\right]$, $f(x)<0$

f est croissante sur $\left[\sqrt{2}\,;2\right]$, $f(2)=-13$ donc pour tout x de $\left[\sqrt{2}\,;2\right]$, $f(x)<0$

f est strictement négative sur $]-\infty\,,2]$.

2. *b.* f est croissante sur $[\,3{,}5\,;+\infty\,[$ donc pour tout x de $[\,3{,}5\,;+\infty\,[$, $f(x)\geq f(3{,}5)$ or $f(3{,}5)=12{,}875$ donc pour tout x de $[\,3{,}5\,;+\infty\,[$ $f(x)\geq 12{,}875$ donc f est strictement positive sur $[\,3{,}5\,;+\infty\,[$.

2. *c.* f est strictement négative sur $]-\infty\,,2]$ donc ne s'annule pas sur cet intervalle

f est strictement positive sur $[\,3{,}5\,;+\infty\,[$ donc ne s'annule pas sur cet intervalle

Sur $[2\,;3{,}5]$, f est continue (polynôme) strictement croissante, $f(2)<0$ et $f(3{,}5)>0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution sut cet intervalle.

f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.

3.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4
a	2	2,75	2,75	2,9375
b	3,5	3,5	3,125	3,125
$b-a$	1,5	0,75	0,375	0,1875
m	2,75	3,125	2,9375	3,03125
$f(a)$	– 13	– 4,703	– 4,703	– 1,278
$f(b)$	12,875	12,875	2,768	2,768
$f(m)$	– 4,703	2,768	– 1,278	0,665
signe de $f(m)\,f(b)$	–	+	–	+
encadrement de α	$2\leq\alpha\leq 3{,}5$	$2{,}75\leq\alpha\leq 3{,}5$	$2{,}75\leq\alpha\leq 3{,}125$	$2{,}9375\leq\alpha\leq 3{,}125$

4. *a.* $p=6$ et $q=9$ donc $\Delta=\dfrac{9^2}{4}-\dfrac{6^3}{27}=20{,}25-8=12{,}25=3{,}5^2$

L'équation $x^3=6x+9$ admet pour solution le réel $x=\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}-\sqrt{12{,}25}}+\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}+\sqrt{12{,}25}}$ donc $x=\sqrt[3]{4{,}5-3{,}5}+\sqrt[3]{4{,}5+3{,}5}$

$x=1+\sqrt[3]{8}$ soit $x=3$

b. $4^3=64$ et $15\times 4+4=64$ donc 4 est solution de l'équation $x^3=15x+4$.

$p=15$ et $q=4$ donc $\Delta=\dfrac{4^2}{4}-\dfrac{15^3}{27}=4-125=-121$

$\Delta<0$ donc la méthode de Cardan ne s'applique pas.