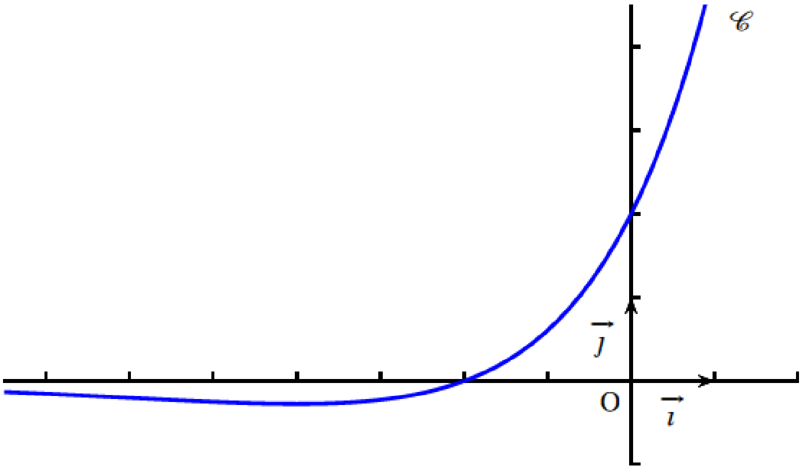
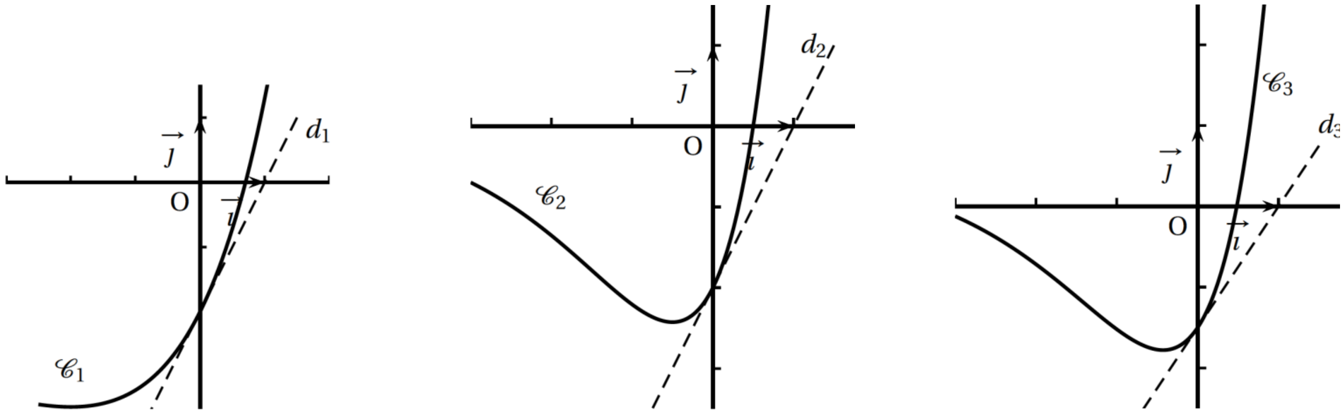
Métropole septembre 2013
EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe **C** et trois autres courbes **C** $_1$, **C** $_2$, **C** $_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. À l'aide de la courbe **C** , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes **C** $_1$, **C** $_2$, **C** $_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 2)\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

1. L'observation de la courbe **C** permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x + 4)\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Interpréter géométriquement le réel I .

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

Vérifier que $f = 2\,(u'v + uv')$.

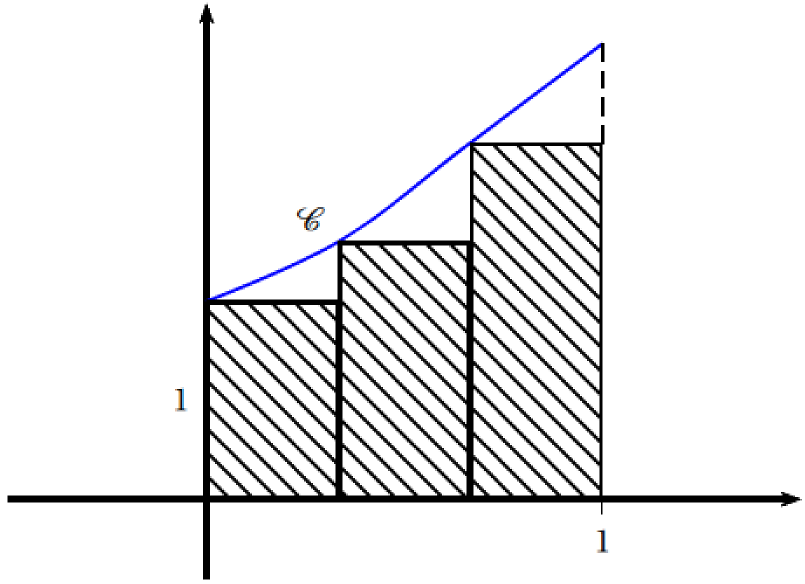
c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ | Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.

Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La droite **D** est définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + 3t\ , \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$$

1. On note **P** le plan d'équation cartésienne $3x + 2y + z - 6 = 0$.

a. La droite **D** est perpendiculaire au plan **P**.

b. La droite **D** est parallèle au plan **P**.

c. La droite **D** est incluse dans le plan **P**.

2. On note **D′** la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

a. Les droites **D** et **D′** sont parallèles.

b. Les droites **D** et **D′** sont sécantes.

c. Les droites **D** et **D′** ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit E l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$.

a. E est l'axe des abscisses.

b. E est l'axe des ordonnées.

c. E est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

a. Le triangle OBC est isocèle en O.

b. Les points O, B, C sont alignés.

c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

— A : « La pièce est produite par la machine A »

— B : « La pièce est produite par la machine B »

— D : « La pièce a un défaut ».

— $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à 0,094.

d. On constate que la pièce choisie a un défaut.

Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Dans cette question, on prend $n = 150$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.

Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. *a.* Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'*une de* l'*autre*

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :
S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,
I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,
M : « l'individu est malade et infecté ».

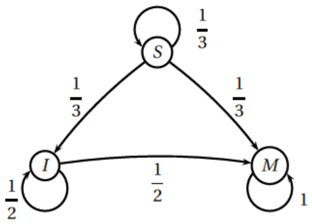
Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

— parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

— parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \;\; i_n \;\; m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.
On a alors $P_0 = (0{,}99 \;\; 0 \;\; 0{,}01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition : $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \;\; I_n \;\; M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0{,}01 \;\; 0{,}10 \;\; 0{,}89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. *a.* Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

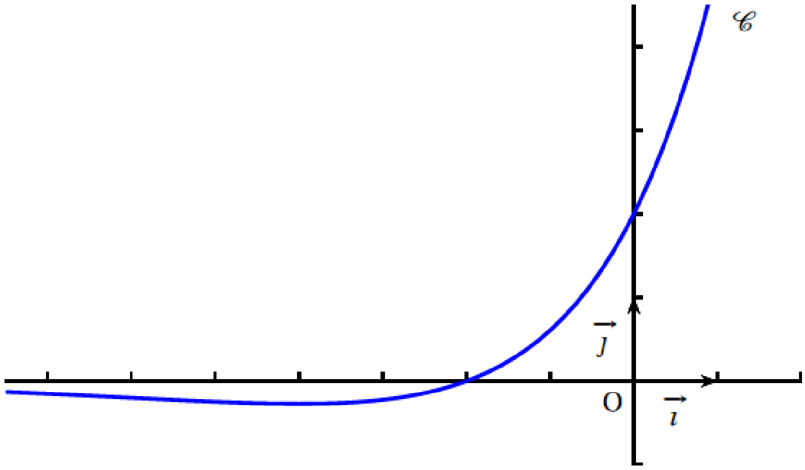
b. Interpréter ce résultat en termes d'évolution de la maladie.
Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

CORRECTION

EXERCICE 1

Partie A

1. Graphiquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$

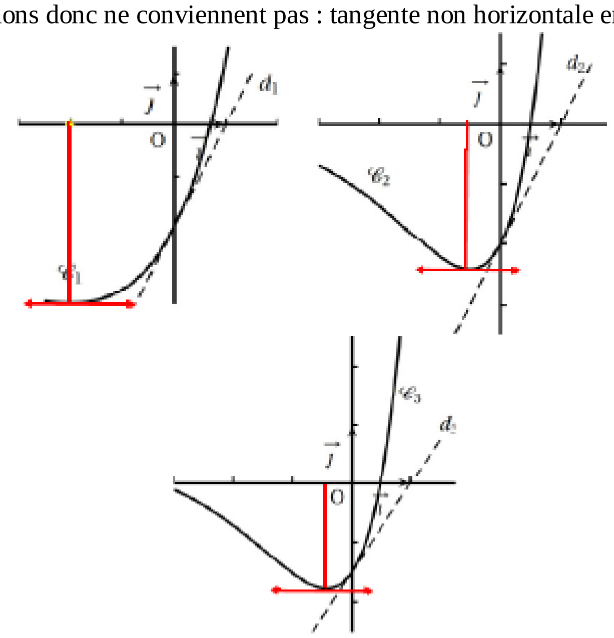


2. ***a.*** F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ donc $F' = f$.

$F'(0) = f(0) = 2$
$F'(-2) = f(-2) = 0$

b. F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ donc $F' = f$ donc F est décroissante sur $]-\infty ; -2]$ et F est croissante sur $[-2 ; +\infty[$.

$F'(-2) = f(-2) = 0$ donc la courbe représentative de F admet au point d'abscisse -2 une tangente horizontale.
C$_2$ et **C**$_3$ ne remplissent pas ces conditions donc ne conviennent pas : tangente non horizontale en -2 pour les deux courbes.



Partie B

1. L'observation de la courbe **C** permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. $\begin{cases} u(x) = x+2 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{\frac{1}{2}x} & v'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\,\frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x}\,[\,2 + (\,x+2\,)\,] = \frac{1}{2}(x+4)\;e^{\frac{1}{2}x}$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 4$

si $x \le -4$, $f'(x) \le 0$
si $x \ge -4$, $f'(x) \ge 0$ donc f admet un minimum pour $x = -4$

2. *a.* La fonction f est définie continue positive sur [0 ; 1] donc I est l'aire de la partie de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} & v'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$ donc $2\,(u'\,v + u\,v')\,(x) = 2\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = (x+2)\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ donc $f = 2\,(u'\,v + u\,v')$.

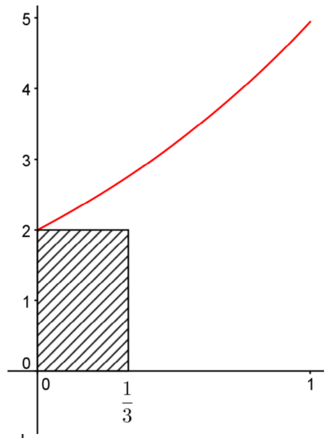
c. $f = 2\,(u'\,v + u\,v') = 2\,(u\,v)'$ donc une primitive de f est la fonction F telle que F = $2\,u\,v$

$I = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = 2 \times 1\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 2 \times 0\ \mathrm{e}^{0} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

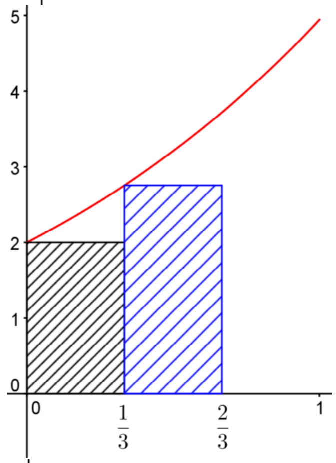
3. *a.*

Initialisation $s = 0$

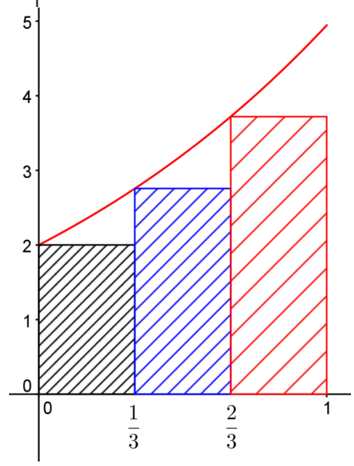
Pour k = 0, $\frac{1}{3}\,f(0)$ est l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f(0)$ soit l'aire du rectangle hachuré :
donc s prend la valeur égale à l'aire hachurée en noir



Pour k = 1, à cette aire on ajoute $\frac{1}{3}\,f\left(\frac{1}{3}\right)$ donc on ajoute l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f\left(\frac{1}{3}\right)$ soit l'aire du rectangle hachuré en bleu
s prend donc la valeur égale à la somme des deux aires hachurées.



Pour k = 2, à cette aire on ajoute $\frac{1}{3}\,f\left(\frac{2}{3}\right)$ donc on ajoute l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{3}$ de longueur $f\left(\frac{2}{3}\right)$ soit l'aire du rectangle hachuré en rouge.
s prend donc la valeur égale à la somme des trois aires hachurées.
L'algorithme s'arrête donc s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-contre



b. L'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k = 0$ à $k = (n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}\,f\left(\frac{k}{n}\right)$ donc l'affichage est : $\frac{1}{n}\,f(0) + \frac{1}{n}\,f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

C'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$ leur longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. ***a.*** **FAUX**

b. **VRAI**

c. **FAUX**

Un vecteur directeur de **D** est $\vec{v}\,(-2\,;3\,;0)$

Un vecteur normal au plan **P** est $\vec{n}\,(3\,;2\,;1)$

$\vec{v}\cdot\vec{n} = -2\times 3 + 3\times 2 + 0\times 1 = 0$

donc la droite **D** est parallèle au plan **P** (strictement ou pas).

Le point A (5 ; 1 ; 4) appartient à la droite **D**

$3\,x_A + 2\,y_A + z_A - 6 = 3\times 5 + 2\times 1 + 4 - 6 = 15$ donc $A \notin$ **P**

La droite **D** est strictement parallèle au plan **P**.

2. ***a.*** **FAUX**

b. **VRAI**

c. **FAUX**

$\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc les droites **D** et **D**′ ne sont pas parallèles elles sont donc soit sécantes soit coplanaires.

La droite **D**' est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3+2t' \\ y = 1-t' \\ z = 1+2t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

Cherchons le point d'intersection s'il existe de **D** et de **D**' donc s'il existe *t* et t' tels que : $\begin{cases} x = 5-2t = 3+2t' \\ y = 1+3t = 1-t' \\ z = 4 = 1+2t' \end{cases}$

t' = $\frac{3}{2}$ donc $\begin{cases} 5-2t = 6 \\ 1+3t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ 3t = -\frac{3}{2} \end{cases}$ soit $t = \frac{1}{2}$ donc les deux droites se coupent en $B\left(6\,;-\frac{1}{2}\,;4\right)$.

3. ***a.*** **VRAI**.

b. **FAUX**

c. **FAUX**

Soit A le point d'affixe – i et B le point d'affixe i

$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB] $\Leftrightarrow$ E est l'axe des abscisses.

4. ***a.*** **FAUX**

b. **FAUX**

c. **VRAI**.

$\frac{c}{b} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$

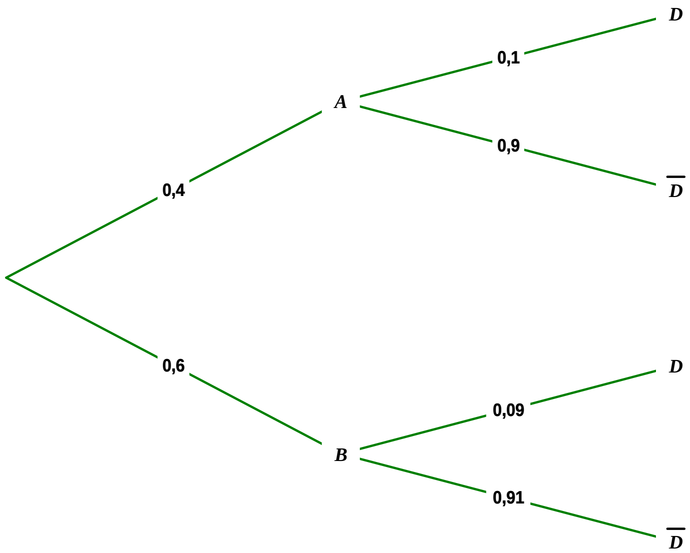
$c = (1+i)\,b$ donc $c - b = i\,b$ donc $|c-b| = |b|$ soit BC = OB donc le triangle OBC est isocèle en B

$\frac{c}{b} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $|c| = \sqrt{2}\,|b|$ donc $OC = \sqrt{2}\,OB$

$BC^2 + OB^2 = 2\,OB^2 = OC^2$ donc le triangle OBC est rectangle en B

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

1. *a.*



b. $P(D \cap A) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04$

c. $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = 0{,}04 + 0{,}6 \times 0{,}09 = 0{,}094$

d. $P_D(A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}094} = \dfrac{20}{47}$

2. *a.* On a une succession de n expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
succès : la pièce est conforme $p = 0{,}9$
échec : la pièce n'est pas conforme $q = 1 - p = 0{,}1$
donc la variable aléatoire X_n qui compte le nombre de pièces conformes suit une loi binomiale de paramètres (n ; 0,9).

b. Si $n = 150$ alors $n > 30$, $n\,p = 135$ donc $n\,p > 5$ et $n\,(1-p) = 15$ donc $n\,(1-p) > 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I est défini par $I = \left[\; p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}\;;\; p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}\;\right]$.

Quand $p = 0{,}9$ et $n = 150$ on trouve $1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}} \approx 0{,}048$, donc $I \approx [0{,}852\;;\;0{,}948]$.

c. La proportion de pièces non conformes est $\dfrac{21}{150} = 0{,}14$ donc la proportion de pièces conformes est $1 - 0{,}14 = 0{,}86$

$0{,}86 \in [0{,}852\;;\;0{,}948]$ donc au regard de l'intervalle de fluctuation de la question ci -dessus, ce test ne remet pas en cause le réglage de la machine A.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a. b.*

n	1	2	3	4
u_n	0,8	1,08	0,98	1,01
$u_n - 1$	– 0,2	0,08	– 0,02	0,01
signe de $u_n - 1$	–	+	–	+
signe de $(-1)^n$	–	+	–	+

si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. <u>Initialisation :</u> $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $u_0 - 1 > 0$
$(-1)^0 = 1$ donc $u_0 - 1$ et $(-1)^0$ ont le même signe, la propriété est initialisée pour $n = 0$

<u>Hérédité :</u> montrons pour tout n de $\mathbb{N}$, que si $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ alors $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1} = -\dfrac{u_n - 1}{2u_n + 1}$

$u_n > 0$ donc $2u_n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $-(u_n - 1)$
$u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ alors $-u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ donc $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. *a.* $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n+1}{2u_n+1}$ et $u_{n+1} + 1 = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1} + 1 = \dfrac{u_n+2+(2u_n+1)}{2u_n+1} = \dfrac{3u_n+3}{2u_n+1}$

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = (u_{n+1}-1) \times \dfrac{1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{-u_n+1}{2u_n+1} \times \dfrac{2u_n+1}{3u_n+3}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.

b. $v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3} = \dfrac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ donc $v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}\, v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ de premier terme $\dfrac{1}{3}$ donc $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ ce qui peut aussi s'écrire

$v_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ ou encore $v_n = -\dfrac{1}{(-3)^{n+1}}$

c. $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1-\dfrac{1}{(-3)^{n+1}}}{1+\dfrac{1}{(-3)^{n+1}}}$ donc pour tout entier n, $u_n = \dfrac{(-3)^{n+1}-1}{(-3)^{n+1}+1}$

$v_n = v_0 \times q^n$ et $-1 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ or $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

P_n A = (s_n i_n m_n) A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}s_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{pmatrix}$ donc $P_{n+1} = P_n$ A

2. Initialisation : si $n = 1$, $P_0 \times A = P_1$ (voir question précédente quand $n = 0$).
Hérédité montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $P_n = P_0 \times A^n$ alors $P_{n+1} = P_0 \times A^{n+1}$.

$P_{n+1} = P_n$ A or $P_n = P_0 \times A^n$ donc $P_{n+1} = P_0 \times A^n \times A$

$P_{n+1} = P_0 \times A^{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. $P_4 = P_0 \times A^4$.

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{16}{6^4} & \frac{130}{6^4} & \frac{1150}{6^4} \\ 0 & \frac{81}{6^4} & \frac{1215}{6^4} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{6^4} \end{pmatrix}$$

$P_0 \times A^4 = (0{,}99 \ \ 0 \ \ 0{,}01) \begin{pmatrix} \frac{16}{6^4} & \frac{130}{6^4} & \frac{1150}{6^4} \\ 0 & \frac{81}{6^4} & \frac{1215}{6^4} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{6^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15{,}84}{1296} & \frac{1151}{1296} & \frac{1151{,}46}{1296} \end{pmatrix}$ en arrondissant à 10^{-2} près $P_4 = (\ 0{,}01 \ 0{,}10 \ \ 0{,}89\ )$

La probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines est 0,01.

Partie B

1. $Q_{n+1} = Q_n \times B$ donc $\begin{cases} S_{n+1} = \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n \\ I_{n+1} = \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n \\ M_{n+1} = \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{cases}$

2. $B^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $B^2 = \frac{1}{3}J$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

<u>Démonstration non demandée :</u>

Initialisation : si $n = 2$, $B^2 = B^2$.

Hérédité montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geq 2$, si $B^n = B^2$ alors $B^{n+1} = B^2$.

$B^{n+1} = B^n \times B = B^2 \times B$ or $B^2 = \frac{1}{3}J$ donc $B^2 \times B = \frac{1}{3}J \times B$.

$$\frac{1}{3}J \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}J \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}J \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3}J \times B = \frac{1}{3}\ J$ donc $B^{n+1} = \frac{1}{3}\ J = B^2$ La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geq 2$, $B^n = B^2$.

3. *a.* On peut montrer que comme $Q_{n+1} = Q_n \times B$ alors $Q_n = Q_0 B^n$.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$ donc $Q_{n+1} = Q_0 B^2$
$Q_{n+1} = Q_2$.

$$Q_2 = \frac{1}{3}Q_0 \times J = (0{,}01 \quad 0{,}10 \quad 0{,}89) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{0{,}01+0{,}10+0{,}89}{3} & \frac{0{,}01+0{,}10+0{,}89}{3} & \frac{0{,}01+0{,}10+0{,}89}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q_n = Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b. Avec ce vaccin l'évolution de la maladie va donner des groupes équitablement répartis : autant de chance d'être malade ou sain ou infecté ; le vaccin n'éradique pas la maladie.
On pourrait montrer que sans vaccin, la répartition limite serait : tous malades ...