LA REUNION juin 2007

On pourra utiliser sans justification que $\lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\,e^{x}}{e^{x}-1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1\. *a*. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{e^{x}-1}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2\. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^{x}-1}$

et démontrer que f est continue en 0.

3\. *a*. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$e^{x} \geq x + 1,$$

et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f'(x) = \frac{e^{x}\,g(x)}{(e^{x}-1)^{2}}.$$

c. Donner le tableau des variations de f.

4\. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ de la courbe C .

a. Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{e^{x}-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

CORRECTION

1\. *a*. Soit $X = -x$, $\lim_{x \to -\infty} X = 0$ et $x\,e^{x} = X\,e^{-X}$

$\lim_{X \to +\infty} X\,e^{-X} = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} x\,e^{x} = 0$ de plus $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b. pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = \dfrac{x\,e^{x}}{e^{x}-1}$ or $x\left(1 + \dfrac{1}{e^{x}-1}\right) = x\,\dfrac{e^{x}-1+1}{e^{x}-1} = \dfrac{x\,e^{x}}{e^{x}-1} = f(x)$.

$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^{x}-1}\right) = 1$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2\. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x\,e^{x}}{e^{x}-1} = 0 \times 1 = 0$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

3\. *a*. Soit $h(x) = e^{x} - (x + 1)$, $h'(x) = e^{x} - 1$ donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		↘	0	↗	

h est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ h admet un minimum en 0

pour tout nombre réel x, on a : $h(x) \geq 0$ donc $e^{x} \geq x + 1$, et l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. $f'(x) = \dfrac{(x+1)\,e^{x}\,(e^{x}-1) - e^{x}\,x\,e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$ donc $f'(x) = e^{x}\,\dfrac{e^{x}-(x+1)}{(e^{x}-1)^{2}}$ soit $g(x) = e^{x} - (x + 1)$

c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	0	↗	0	↗	$+\infty$

4\. *a*. $f(-x) = -x\,\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1} = -x\,\dfrac{e^{-x} \times e^{x}}{(e^{-x}-1)\,e^{x}} = \dfrac{x}{e^{x}-1}$

Le coefficient directeur de la droite (MM') est égal à : $\dfrac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}}$ or $y_M - y_{M'} = \dfrac{x\,e^{x}}{e^{x}-1} - \dfrac{x}{e^{x}-1} = x$

$x_M - x_{M'} = x - (-x) = 2x$ donc $\dfrac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}} = \dfrac{1}{2}$

b. On sait que la tangente au point A d'abscisse 0 est, quand elle existe, la position limite de la droite (AM) quand M est un point de la courbe qui tend vers A donc d'après la question précédente on pourrait penser que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$