Pondichéry Mai 99

1 : Résoudre dans C l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 4 = 0$.

On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2 : *a* : Déterminer le module et un argument de chacune de ces solutions.

***b* :** Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3 : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité : 1cm), on considère :

le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1 + i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1 - i)$, et le point A d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

***a* :** Déterminer l'affixe du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport – 3.

***b* :** Déterminer l'affixe du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

***c* :** Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

***d* :** Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

***e* :** Soit I le milieu du segment $[M_3 M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_2, M_5 et M_4 forment un carré.

CORRECTION

1: Cette équation est du second degré et a pour discriminant – 8.

Ses racines sont donc $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

2: *a*: Ces deux complexes ont pour module 2.

Comme $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{3\pi}{4}$, on peut alors écrire ces deux complexes sous leur forme trigonométrique:

$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\dfrac{-3\pi}{4} + i\sin\dfrac{-3\pi}{4}\right)$

***b*:** Comme z_1 et z_2 ont même module 2, le rapport $\dfrac{z_1}{z_2}$ a pour module 1.

De plus, un argument de z_1 est $\dfrac{3\pi}{4}$ et un argument de z_2 est $\dfrac{-3\pi}{4}$, on peut dire qu'un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est : $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{-3\pi}{4}$ soit $\dfrac{3\pi}{2}$

Ce qui montre que $\dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i$ donc $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = -1$.

3: ***Rappels :*** Soit l'homothétie h de centre A d'affixe a et de rapport k non nul.

Pour tout point M du plan d'affixe z, M' = h(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$. l'affixe de M' = h(M) est : $z' = a + k(z - a)$.

Soit la rotation ,de centre A, d'affixe a, d'angle α. Pour tout point M du plan d'affixe z, l'affixe de r(M) est : $z' = e^{i\alpha}(z - a) + a$.

***a*:** L'affixe de M_3 est : $z_3 = -3\left[z_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui donne : $z_3 = -3\left[\sqrt{2}(1 - i) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = \sqrt{2}(-1 + 3i)$

***b*:** L'affixe de M_4 est $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_2 = -i z_2$ ce qui donne : $z_4 = -i\sqrt{2}(1 - i) = -\sqrt{2}(1 + i)$.

***d*:** $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = -i$ donc $\arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ soit $(\overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_1M_3}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Les droites (M_3M_1) et (M_1M_4) sont orthogonales.

***e*:** L'affixe de I est : $z_I = \dfrac{z_3 + z_4}{2}$.

L'affixe de M_5 est : $z_5 = 2z_I - z_1 = \sqrt{2}(-3 + i)$.

On constate alors que : $|z_1 - z_3| = |z_3 - z_5| = |z_5 - z_4| = |z_4 - z_1|$

On a donc un quadrilatère dont les côtés ont même longueur donc qui est un losange.

De plus, d'après la question précédente, le triangle $M_3M_1M_4$ est rectangle en M_1. Le losange possède un angle droit, c'est donc un carré.