Nouvelle-Calédonie novembre 2016

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\,e^{-x} - 0,1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

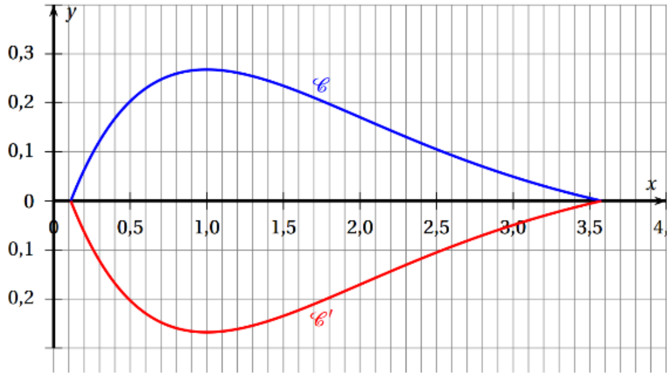
On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que

$$\alpha < \beta \text{ et } f(\beta) = 0.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ dans un repère orthogonal et C ′ la courbe symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)\,e^{-x} - 0,1\,x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes C et C ′.

On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$.

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

Polynésie juin 2016

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

L'intégrale $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 1,5 et 6.

CORRECTION

Amérique du Nord juin 2016

Partie A

1. $f(2e) = 2e \ln e - 2e + 2$ or $\ln e = 1$ donc $f(2e) = 2$ donc $B \in \mathscr{C}_f$

$f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2$ or $\ln 1 = 0$ donc $f(2) = 0$ donc $I \in \mathscr{C}_f$

Soit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$f'(2) = 0$ donc la tangente en I à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses et passe par I, or I est un point de l'axe des abscisses donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. *a.* Une équation de la droite T est $y = f'(2e)(x - 2e) + 2$ or $f'(2e) = 1$

Une équation de la droite T est $y = x - 2e + 2$

$y_D = 0$ donc $0 = x_D - 2e + 2$ donc $x_D = 2e - 2$

b. L'aire du triangle ABI est égale à $\frac{1}{2} AB \times AI = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \times y_A = \frac{1}{2}(2e - 2) \times 2 = 2e - 2$

L'aire du trapèze $AIDB$ est égale à $\frac{1}{2}(ID + AB) \times AI = \frac{1}{2}(2e - 2 - 2 + 2e - 2) \times 2$ soit $4e - 6$

$2e - 2 \le S \le 4e - 6$ soit approximativement entre 3,436 et 4,874

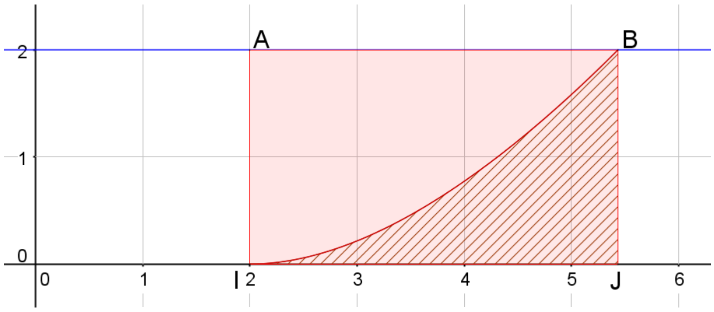
3. *a.* Montrer que, sur l'intervalle $[2 ; 2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2} \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$

est une primitive de ta fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

oit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} & v'(x) = x \end{cases}$ donc $G'(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{4}$ donc $G'(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = g(x)$ donc G est une primitive de la fonction g

b. Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2e]$ est $F(x) = G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \dfrac{x^2}{2} \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$

c. $\int_{2}^{2\text{e}} f(x)\,\text{d}\,x$ = F(2 e) – F(2) est l’aire comprise entre l’axe des abscisses, les droites d’équation x = 2 et x = 2 e et la courbe $\mathscr{C}_f$



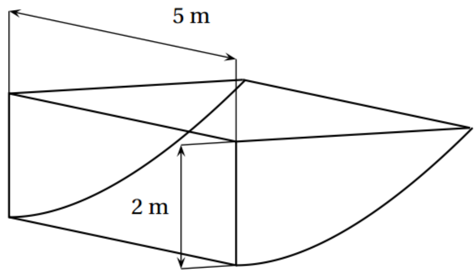
F(2 e) = 2 e^2 ln e – 3 e^2 + 4 e = 2 e^2 – 3 e^2 + 4 e donc F(2 e) = 4 e – e^2

F(1) = 2 ln 1 – 3 + 4 = 1 donc $\int_{2}^{2\text{e}} f(x)\,\text{d}\,x$ = 4 e – e^2 – 1

S est l’aire du carré AIJB – l’aire calculée précédemment

soit S = (2 e – 2) × 2 – (4 e – e^2 – 1) donc S = e^2 – 3.

V = S × 5 = 5 e^2 – 15 unités de volume soit 21,95 m^3 soit 22 m^3 à l’unité près.



Amérique du Sud novembre 2016

1. O appartient à C$_f$ donc $f(0) = 0$ soit $b = 0$ donc $f(x) = a\,x\ \text{e}^{-x^2}$

la droite (OA) est tangente à C$_f$ au point O donc le coefficient directeur de (OA) est 2 et est égal à $f\,'(0)$

soit $\begin{cases} u(x) = a\,x & u'(x) = a \\ v(x) = \text{e}^{-x^2} & v'(x) = -2\,x\,\text{e}^{-x^2} \end{cases}$ donc $f\,'(x) = a\ \text{e}^{-x^2} - 2\,a\,x^2\ \text{e}^{-x^2}$ donc $f\,'(0) = a$ donc $a = 2$ donc $f(x) = 2\,x\ \text{e}^{-x^2}$

2. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, soit $X = x^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\text{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur [0 ; + ∞ [.

$f\,'(x) = a\ \text{e}^{-x^2} - 2\,a\,x^2\ \text{e}^{-x^2}$ donc $f\,'(x) = 2\ \text{e}^{-x^2}\ (1 - 2\,x^2)$

$1 - 2\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		+ ∞
$f\,'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	$\sqrt{2}\ \text{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

3. *a.* $f(x) = -u'(x)\ \text{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2$ donc $g(x) = -\text{e}^{u(x)} + \text{C} = -\ \text{e}^{-x^2} + \text{C}$ où C est un nombre réel

$g(0) = -1$ donc C = 0, $g(x) = -\ \text{e}^{-x^2}$.

b. $I_m = \int_{0}^{m} f(t)\,\text{d}t = g(m) - g(0) = 1 - \text{e}^{-m^2}$

c. soit $X = -m^2$, $\lim\limits_{m \to +\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \text{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{m \to +\infty} I_m = 1$

4. ***a.*** La fonction f est définie continue positive sur [0 ; + ∞ [, $\lim\limits_{m \to +\infty} \int_{0}^{m} f(t)\,\text{d}t = 1$ donc f est une fonction densité de probabilité sur [0 ; + ∞ [.

b. Pour tout réel x de [0 ; +∞[, P(X ≤ x) = $\int_{0}^{x} f(t)\,\text{d}t = 1 - \text{e}^{-x^2}$

P(X ≤ x) = $g(x)$ + 1.

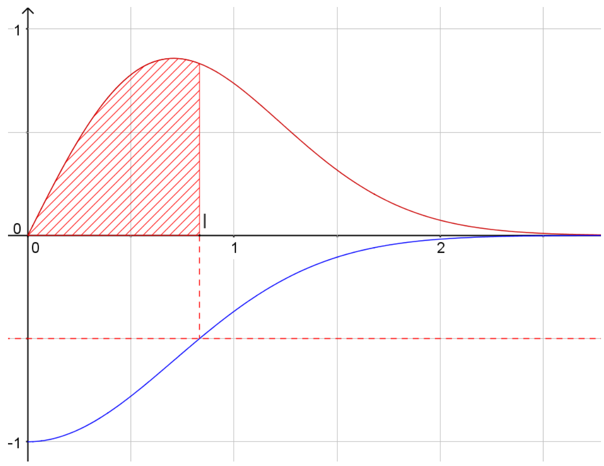
c. P(X ≤ α) = 0,5 ⇔ $x \geq 0$ et $g(x) = -0{,}5$ ⇔ $x \geq 0$ et $\text{e}^{-x^2} = 0{,}5$

⇔ $x \geq 0$ et $-x^2 = \ln 0{,}5 = -\ln 2$ ⇔ $x \geq 0$ et $x^2 = \ln 2$ ⇔ $x = \sqrt{\ln 2}$

d. P(X ≤ α) = 0,5 ⇔ $g(x) = -0{,}5$

La droite d’équation $y = -0{,}5$ coupe C$_g$ en un point d’abscisse α tel que $g(\alpha) = -0{,}5$, d’où la construction du point I

P(X ≤ α) = $\int_{0}^{\alpha} f(t)\,\text{d}t$ donc est l’aire du domaine limité par l’axe des abscisses, la courbe C$_f$ et les droites d’équation x = 0 et x = α



Antilles-Guyane juin 2016

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 1 - x^2$ donc une primitive de f est F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1-x^2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}\,x = \left[-\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{0} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{0} - \left(-\mathrm{e} + \frac{1}{2}\mathrm{e}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}\,x$ est l'aire du domaine compris entre C_f et C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

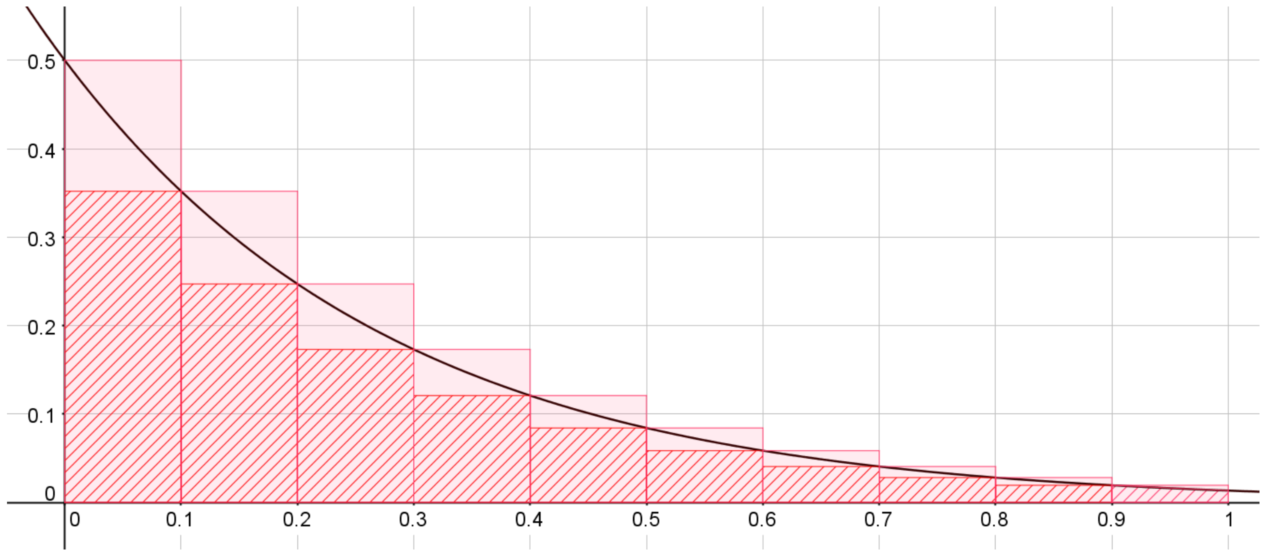
Antilles-Guyane septembre 2016

Partie A - Étude graphique

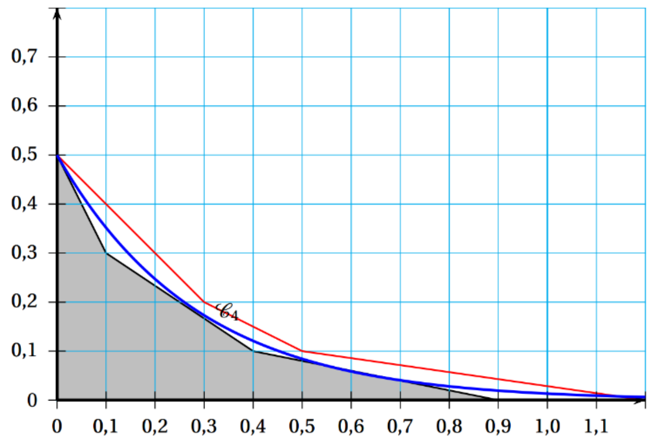
1. La fonction exponentielle est continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f_n continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc u_n est l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_n les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. Graphiquement, C_{n+1} est en dessous de C_n donc la suite (u_n) est décroissante
Elle semble converger vers 0.

3. u_4 est l'aire d'un domaine qui est comprise entre la somme S des aires de rectangles « trop grands » (en rose sur le graphique) et la somme s des aires de rectangles « trop petits » (hachurés sur le graphique).
$S = 0{,}1\,f(0) + 0{,}1\,f(0{,}1) + 0{,}1\,f(0{,}2) + \ldots. + 0{,}1\,f(0{,}9) = 0{,}1\,[f(0) + f(0{,}1) + \ldots + f(0{,}9)]$
$s = 0{,}1\,f(0{,}1) + 0{,}1\,f(0{,}2) + \ldots. + 0{,}1\,f(0{,}9) + 0{,}1\,f(1) = 0{,}1\,[f(0{,}1) + \ldots + f(0{,}9) + f(1)]$
$f(0{,}1) + \ldots + f(0{,}9) = 1{,}12385$
donc $S = 0{,}1\,(0{,}5 + 1{,}123848665) = 0{,}162384866$
$s = 0{,}1\,[1{,}12385 + 0{,}013389805) = 0{,}113723847$ donc $0{,}113 < 0{,}113723847 \le u_4 \le 0{,}162384866 < 0{,}163$
$0{,}163 - 0{,}113 = 0{,}05$ donc on a bien un encadrement de u_4 égal à 0,05



On aurait pu aussi utiliser une décomposition en utilisant des trapèzes



Partie B - Étude théorique

1. $\displaystyle u_0 = \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}\,x = \left[\ln(1+\mathrm{e}^{x}\right]_0^1$ donc $u_0 = \ln(1 + \mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. $u_0+u_1=\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$u_0+u_1=\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=\left[x\right]_0^1=1$ donc $u_1=1-u_0=1-\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier naturel n, et pour tout x de [0 ; 1], $f_n(x)>0$ donc $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$ donc $u_n\geq 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$.

a. $d_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}-\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{-nx}-\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{-nx}-\mathrm{e}^{-nx+x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{-nx}(1-\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}$

b. si $0\leq x\leq 1$ alors $1\leq \mathrm{e}^x\leq \mathrm{e}$ donc $1-\mathrm{e}^x\leq 0$ et $1+\mathrm{e}^x>0$ donc, sur l'intervalle [0 ; 1], $d_n(x)\leq 0$

5. Sur l'intervalle [0 ; 1], $d_n(x)\leq 0$, donc $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$ donc $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

soit $u_{n+1}\leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$f_{n+1}(x)+f_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{-nx}+\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{-nx}+\mathrm{e}^{-nx+x}}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{-nx}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{-nx}$

$u_{n+1}+u_n=\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(f_{n+1}(x)+f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

b. $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(u_n+u_{n+1}\right)=2\ell=0$ donc $\ell=0$

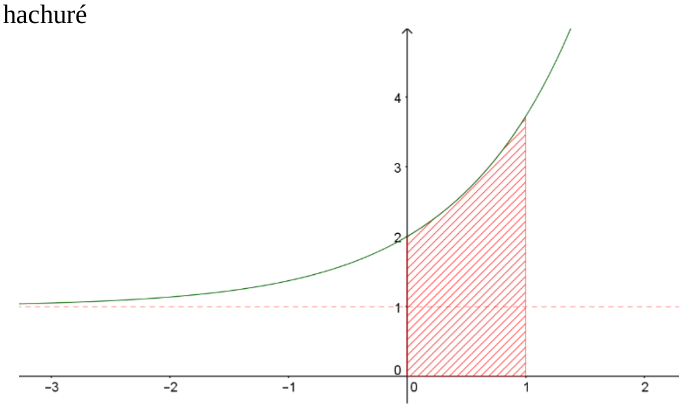
c. Puisque $u_{n+1}+u_n=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ alors $u_{n+1}=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}-u_n$ donc :

Traitement :	Tant que K < N Affecter $\frac{1-\mathrm{e}^{-K}}{K}-U$ à U Affecter K + 1 à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

Asie juin 2016

1. $a=0$ donc $f_0(x)=0$ donc $I(0)=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$

2. *a.* I(1) est l'aire du domaine hachuré



b. $I(1)=\int_0^1(\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x+x\right]_0^1=\mathrm{e}+1-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}$ donc $\mathrm{I}(1)\approx 2{,}2$

3. $I(a)=\int_0^1 (a\,e^{ax}+x)\,dx=\left[e^{ax}+a\,x\right]_0^1=e^a+a-e^0=e^a+a-1$.

Soit g la fonction définie par $g(x)=e^x+x-1$, g est la somme de fonctions strictement croissantes sur R ($x\to e^x$ et $x\to x-1$) donc g est strictement croissante sur R, g est continue sur R, $g(0)=0$ et $g(1)=e$ donc $g(0)<2<g(1)$ donc l'équation $g(x)=2$ admet une seule solution a sur [0 ; 1].

$g(0{,}792)<2$ et $g(0{,}793)<2$ donc $0{,}792<a<0{,}793$, $a\approx 0{,}792$ à 10^{-3} près.

Centres étrangers juin 2016

Partie A - Étude de quelques exemples

1. ***a.*** f est une fonction constante strictement positive donc $f(x)=k$ (k réel strictement positif)

$A_1=\int_0^a k\,dx=\left[k\,x\right]_0^a=k\,a$ et $A_2=\int_a^1 k\,dx=\left[k\,x\right]_a^1=k\,(1-a)$

$A_1=A_2\Leftrightarrow k\,a=k\,(1-a)\Leftrightarrow a=1-a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$. La condition (E) est remplie pour un unique réel $a=\dfrac{1}{2}$.

b. $A_1=\int_0^a x\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a=\dfrac{1}{2}a^2$ et $A_2=\int_a^1 x\,dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_a^1=\dfrac{1}{2}(1-a^2)$

$A_1=A_2\Leftrightarrow a^2=1-a^2\Leftrightarrow 2\,a^2=1\Leftrightarrow a^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ or $a>0$ donc $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La condition (E) est remplie pour un unique réel $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. ***a.*** f étant continue positive sur [0 ; 1], $A_1=\int_0^a f(x)\,dx$ et $A_2=\int_a^1 f(x)\,dx$

b. $A_1=\int_0^a f(x)\,dx=F(a)-F(0)$ et $A_2=\int_a^1 f(x)\,dx=F(1)-F(a)$

Si le réel a satisfait la condition (E), alors $A_1=A_2\Leftrightarrow F(a)-F(0)=F(1)-F(a)\Leftrightarrow 2\,F(a)=F(0)+F(1)\Leftrightarrow F(a)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$

Si $F(a)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$, avec $a\in[0\,;1]$, $A_1=\int_0^a f(x)\,dx=F(a)-F(0)$ et $A_2=\int_a^1 f(x)\,dx=F(1)-F(a)$

$A_1=\int_0^a f(x)\,dx=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}-F(0)=\dfrac{F(1)-F(0)}{2}$

$A_2=\int_a^1 f(x)\,dx=F(1)-\dfrac{F(0)+F(1)}{2}=\dfrac{F(1)-F(0)}{2}$ donc $A_1=A_2$, la réciproque est vraie.

3. ***a.*** Une primitive de f est F définie par $F(x)=e^x$

$A_1=A_2\Leftrightarrow F(a)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}\Leftrightarrow e^a=\dfrac{e+1}{2}\Leftrightarrow a=\ln(e+1)-\ln 2$.

$\ln(e+1)-\ln 2\approx 0{,}6$ donc $a\in[0\,;1]$ et $A_1=A_2$

La condition (E) est remplie pour un unique réel $a=\ln(e+1)-\ln 2$.

b. Une primitive de f est F définie par $F(x)=-\dfrac{1}{x+2}$

$\dfrac{F(0)+F(1)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{-1}{3}\right)=\dfrac{-5}{12}$ et $F\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{1}{\dfrac{2}{5}+2}=\dfrac{-5}{12}$ donc $F\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ donc $A_1=A_2$

La valeur $a=\dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de *a*

1. Une primitive de f est F définie par $F(x)=4\,x-x^3$

$A_1=\int_0^a f(x)\,dx=F(a)-F(0)=4\,a-a^3$ et $A_2=\int_a^1 f(x)\,dx=F(1)-F(a)=3-4\,a+a^3$

Si a est un réel satisfaisant la condition (E), $A_1=A_2\Leftrightarrow 4\,a-a^3=3-4\,a+a^3\Leftrightarrow 8\,a=3+2\,a^3\Leftrightarrow a=\dfrac{a^3}{4}+\dfrac{3}{8}$

Si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation : $x=\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{3}{8}$

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle [0, 1] par $g(x)=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$, et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. $u_1 = g(u_0) = g(0)=\frac{3}{8}$

b. $g'(x)=\frac{3}{4}x^2$ donc $g'(x) \geq 0$ sur l'intervalle [0, 1] donc la fonction g est croissante sur l'intervalle [0, 1].

c. Initialisation : $u_1 = \frac{3}{8}$ et $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

x	0	u_n	u_{n+1}	1
g	0	$g(u_n)$	$g(u_{n+1})$	$\frac{5}{8}$

g est croissante sur [0 ; 1] donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8} \leq 1$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. La propriété est héréditaire.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de IN, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d. Pour tout n de IN, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ donc la suite est croissante, majorée par 1 donc la suite (u_n) est convergente.
Soit L la limite de la suite (u_n), puisque $u_{n+1} = g(u_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$ donc L = g(L).

a est solution de l'équation : $x=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$, et a est unique donc L = a.

e.

n	u_n
0	0
1	0,375
2	0,388183594
3	0,389623507
4	0,389786843
5	0,389805447

n	u_n
5	0,389805447
6	0,389807567
7	0,389807809
8	0,389807837
9	0,389807840
10	0,389807840

LIBAN juin 2016

Partie A

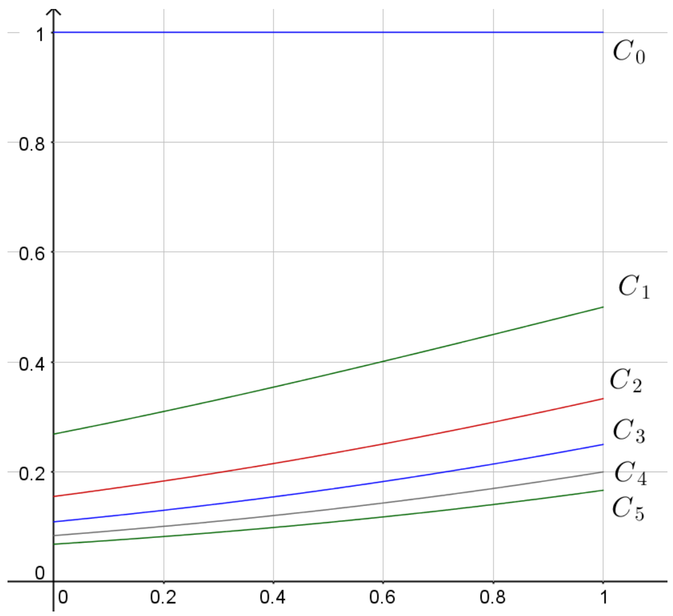
1. La dérivée de e^{1-x} est $-e^{1-x}$ donc $f'(x)=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}=\frac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$ donc $f'(x) > 0$, f est croissante sur [0 ; 1].

2. $f(x)=\frac{1}{1+e^{1-x}}=\frac{e^x}{e^x(1+e^{1-x})}=\frac{e^x}{e^x+e}$.

3. $\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\ln(e^x+e)\right]_0^1=\ln(2e)-\ln(1+e)=\ln 2+\ln e-\ln(1+e)$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(2)+1-\ln(1+e)$.

Partie B

1.



2. Soit n un entier naturel, u_n est l'aire du domaine limité par la courbe C_n l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et $u_0 = 1$

3. Graphiquement, on peut supposer que la suite (u_n) est décroissante.

$n + 1 > n$, $e^{1-x} > 0$ donc $1 + (n + 1)\, e^{1-x} > 1 + n\, e^{1-x} > 0$ donc $\dfrac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}} < \dfrac{1}{1+n\,e^{1-x}}$ donc $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est décroissante.

4. Pour tout x de $[0 ; 1]$, $1 \leq e^{1-x} < e$ donc, $1 + n \leq 1 + n\, e^{1-x} \leq 1 + n\, e$ donc en passant aux inverses : $\dfrac{1}{1+n} \leq \dfrac{1}{1+n\,e^{1-x}} \leq \dfrac{1}{1+n\,e}$

donc

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+n}\, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+n\,e^{1-x}}\, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+n\,e}\, dx$ soit $\displaystyle\frac{1}{1+n}\int_0^1 dx \leq u_n \leq \frac{1}{1+n\,e}\int_0^1 dx$

$\displaystyle\int_0^1 dx = 1$ donc $\dfrac{1}{1+n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{1+n\,e}$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+n\,e} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Nouvelle-Calédonie novembre 2016

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -0{,}1$

2. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} = (1 - x)\, e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-0{,}1$	↗	$e^{-1} - 0{,}1$	↘	$-0{,}1$

3. La fonction f est définie continue strictement croissante sur $[0 ; 1]$, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

4. $\begin{cases} u(x) = x + 1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $F'(x) = -e^{-x} + (x + 1)\, e^{-x} - 0{,}1 = x\, e^{-x} - 0{,}1 = f(x)$ donc la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ par $F(x) = -(x + 1)\, e^{-x} - 0{,}1\, x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

5. La courbe C' est la symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses donc $\displaystyle A = 2\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

$A = 2\,[F(\beta) - F(\alpha)]$ donc $A \approx 2 \times 0{,}5197$ soit $A \approx 1{,}039$ à 0,001 près.

6. L'unité sur chaque axe est de 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m^2. L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de $1{,}039 \times 25 = 25{,}975$ m^2.

On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m2 on en disposera $25{,}975 \times 36$ soit 935 plants de tulipes

Polynésie juin 2016

En choisissant

B (2,000 001 ; 0,000 001),

D (3,000 001 ; 0,000 001)

F (4,999 999 ; 1,000 001)

la ligne brisée ABCDEFG vérifie l'hypothèse et $\displaystyle\int_2^5 f(x)\, dx$ est approximativement l'aire de EE'G'G donc est voisine de 1 donc n'est pas comprise entre 1,5 et 6.