1. Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et $\overline{j} = j^2$

2. On cherche les nombres complexes z tels que : $|z| = |1 + z| = 1$ (1)

a. Montrer que j satisfait à la condition (1)

b. Montrer que pour tous nombres $z = x + i\,y$, avec x et y réels, vérifiant (1), on a $x = -0{,}5$.

En déduire que j et $\overline{j}$ sont les seuls nombres complexes satisfaisant à la condition (1).

3. Soit A, B, C trois points du cercle de centre O et de rayon R.

On suppose que O est l'isobarycentre des points A, B, C d'affixes respectives a, b, c. On pose $p = \dfrac{b}{a}$ et $q = \dfrac{c}{a}$.

a. Montrer que $|p| = |q| = 1$ et que $1 + p = -q$.

b. Montrer à l'aide du 2.*b*. que l'on a soit $p = j$, soit $p = \overline{j}$.

Dans ce qui suit on suppose que $p = j$.

c. Montrer à l'aide de 1 que $q = j^2 = \overline{j}$

d. Montrer que : $b - a = (j - a)\,a$, $c - b = (j - 1)\,b$, et $c - a = (\overline{j} - 1)\,a$, et en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

CORRECTION

1. $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$ donc $\overline{j} = j^2$

$1 + j + j^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ donc $1 + j + j^2 = 0$

2. *a*. $\left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1$ donc $|j| = 1$; $1 + j = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $|1 + j|^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ donc $|1 + j| = 1$

j satisfait à la condition (1)

b. pour tous nombres $z = x + i\,y$, avec x et y réels, vérifiant (1), on a $|z|^2 = |1 + z|^2$ donc $x^2 + y^2 = (1 + x)^2 + y^2$

soit $2x + 1 = 0$ donc $x = -\dfrac{1}{2}$.

$|z| = 1$ et $x = -\dfrac{1}{2}$ donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ soit $y^2 = \dfrac{3}{4}$ donc $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Les complexes vérifiant la condition (1) sont $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (donc j) et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (donc $\overline{j}$), j et $\overline{j}$ sont les seuls nombres complexes satisfaisant à la condition (1).

3. *a*. A, B, C trois points du cercle de centre O et de rayon R donc OA = OB = OC = R donc $|a| = |b| = |c| = R$

donc $|p| = \left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|} = 1$ et $|q| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = \dfrac{|c|}{|a|} = 1$.

O est l'isobarycentre des points A, B, C d'affixes respectives a, b, c donc $a + b + c = 0$

$a \neq 0$ donc $1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} = 0$ soit $1 + p + q = 0$ donc $1 + p = -q$

b. $|q| = 1$ or $-q = 1 + p$ donc $|q| = |1 + p|$ donc $|p| = |1 + p| = 1$ donc p vérifie la condition (1)

or j et $\overline{j}$ sont les seuls nombres complexes satisfaisant à la condition (1) donc soit $p = j$, soit $p = \overline{j}$.

c. $1 + p = -q$ et $p = j$ donc $q = -(1 + j)$ or $1 + j + j^2 = -1$ donc $1 + j = -j^2$ donc $q = -(-j^2)$

$q = j^2$ or $j^2 = \overline{j}$ donc $q = j^2 = \overline{j}$

d. $p = j$ donc $\dfrac{b}{a} = j$ donc $b = a\,j$ donc $b - a = a\,j - a = a\,(j - 1)$

$q = j^2$ donc $\dfrac{c}{a} = j^2$ donc $c = j^2\,a$ donc $c - b = j^2\,a - j\,a$ donc $c - b = j\,a\,(j - 1)$ or $j\,a = b$ donc $c - b = (j - 1)\,b$

$q = \overline{j}$ donc $\dfrac{c}{a} = \overline{j}$ donc $c = \overline{j}\,a$ donc $c - a = \overline{j}\,a - a = a\,(\overline{j} - 1)$

$|b - a| = |a|\,|j - 1| = R\,|j - 1|$ et $|c - b| = |b|\,|j - 1| = R\,|j - 1|$

$|c - a| = |a|\,|\overline{j} - 1| = R\,|\overline{j} - 1|$ or $|\overline{z}| = |z|$ donc $|\overline{j - 1}| = |j - 1|$ donc $|\overline{j} - 1| = |j - 1|$

donc $|b - a| = |c - b| = |c - a|$ soit AB = BC = CA donc le triangle ABC est équilatéral.