On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 8$ et : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (D) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels

3. Montrer que

a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3

b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

CORRECTION

1. **Initialisation :** $x_0 = 1$ et $y_0 = 8$ donc $5x_0 - y_0 + 3 = 5 \times 1 - 8 + 3 = 0$
Le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) est sur la droite (D).

Hérédité : montrons pour tout n de $\mathbb{N}$ que si le point M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (D) alors le point M_{n+1} de coordonnées (x_{n+1}, y_{n+1}) sont sur la droite (D).

$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \left(\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5\right) + 3$

$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = \frac{35-20}{3}x_n + \frac{5-8}{3}y_n + 5 - 5 + 3$

$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5x_n - y_n + 3$

D'après l'hypothèse de récurrence $M_n \in (D)$ donc $5x_n - y_n + 3 = 0$ donc $5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 0$ donc $M_{n+1} \in (D)$

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_n \in (D)$.

$x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1$ or $M_n \in (D)$ donc $5x_n - y_n + 3 = 0$ soit $y_n = 5x_n + 3$ donc $x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}(5x_n + 3) + 1$ donc $x_{n+1} = 4x_n + 2$

2. **Initialisation :** $x_0 = 1$ donc $x_0 \in \mathbb{N}$

Hérédité : montrons pour tout n de $\mathbb{N}$ que si $x_n \in \mathbb{N}$ alors $x_{n+1} \in \mathbb{N}$.

$x_{n+1} = 4x_n + 2$. D'après l'hypothèse de récurrence $x_n \in \mathbb{N}$ donc $4x_n + 2 \in \mathbb{N}$ donc $x_{n+1} \in \mathbb{N}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{N}$.

$y_n = 5x_n + 3$ or $x_n \in \mathbb{N}$ donc $5x_n + 3 \in \mathbb{N}$ donc $y_n \in \mathbb{N}$.

3. *a.* x_n est divisible par 3 alors $\frac{7}{3}x_n \in \mathbb{N}$

$\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 = x_{n+1}$ donc $\frac{1}{3}y_n = x_{n+1} - \frac{7}{3}x_n - 1$, $\frac{7}{3}x_n \in \mathbb{N}$ donc $x_{n+1} - \frac{7}{3}x_n - 1 \in \mathbb{N}$ donc $\frac{1}{3}y_n \in \mathbb{N}$ donc 3 divise y_n

Réciproquement

Si y_n est divisible par 3 alors $\frac{1}{3}y_n \in \mathbb{N}$

$\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 = x_{n+1}$ donc $\frac{7}{3}x_n = x_{n+1} - \frac{1}{3}y_n - 1$

$\frac{1}{3}y_n \in \mathbb{N}$ donc $x_{n+1} - \frac{1}{3}y_n - 1 \in \mathbb{N}$ donc $\frac{7}{3}x_n \in \mathbb{N}$ donc 3 divise $7x_n$

3 et 7 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise x_n d'où l'équivalence : x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b. Soit $d = \text{pgcd}(x_n ; y_n)$

$5x_n - y_n + 3 = 0 \Leftrightarrow -5x_n + y_n = 3$ donc d divise 3

Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors $d \neq 3$ donc $d = 1$

x_n et y_n sont premiers entre eux.