Métropole Juin 2007

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

L'espace est muni du repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [a ; b].

2. Soient les deux intégrales définies par $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \cos x \,\mathrm{d}x$

a. Démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ et que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3 - (4 + \mathrm{i})z^2 + (13 + 4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4 + \mathrm{i})z^2 + (13 + 4\mathrm{i})z - 13\mathrm{i} = (z - \mathrm{i})(az^2 + bz + c).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives :

$$\mathrm{i},\ 2 + 3\mathrm{i} \text{ et } 2 - 3\mathrm{i}.$$

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.

2. Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La figure est proposée en annexe 1. Elle sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives :

$$-5+6\,\mathrm{i},\ -7-2\,\mathrm{i} \text{ et } 3-2\,\mathrm{i}.$$

On admet que le point F, d'affixe $-2+\mathrm{i}$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe -5.

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2. *a*. Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.

Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\,\overline{z} + b$ qui, au point M, associe le point M′.

Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?

b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

c. Vérifier que le point E est un point du cercle Γ.

3. Soit I le milieu du segment [AC].

Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$.

Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a.	0,4	b.	0,04	c.	0,1024	d.	0,2048

2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard.

La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a.	0,043	b.	0,275	c.	0,217	d.	0,033

3. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a.	0,100	b.	0,091	c.	0,111	d.	0,25

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres.

On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a.	$\frac{5}{9}$	b.	$\frac{9}{14}$	c.	$\frac{4}{7}$	d.	$\frac{1}{3}$

EXERCICE 5 5 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

La courbe C représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe C

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit D la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

Partie B : Etude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction *f*.

1. Démontrer que si $x \in [0\,;4]$, alors $f(x) \in [0\,;4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

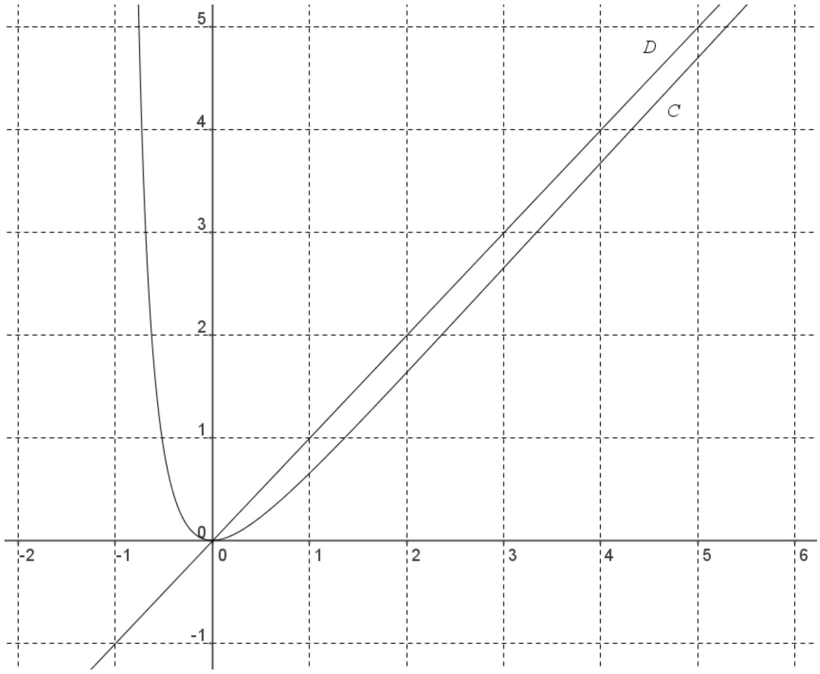
a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points de C d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\,;4]$.

c. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.



CORRECTION

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

L'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Le vecteur $\vec{n}(1 ; 2 ; -1)$ le vecteur normal au plan (P). Le vecteur $\vec{n'}(-1 ; 1 ; 1)$ le vecteur normal au plan (P')

$\vec{n} . \vec{n'} = -1 \times 1 + 2 \times 1 - 1 \times 1 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux donc les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

2. Soit M un point quelconque de (d), il existe un réel t tel que M ait pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} + t ; -\frac{1}{3} ; t\right)$

$\left(-\frac{1}{3} + t\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = 0$ donc M $\in$ (P), tout point de (d) appartient à (P) donc (d) est incluse dans (P)

$-\left(-\frac{1}{3} + t\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + t = 0$ donc M $\in$ (P'), tout point de (d) appartient à (P') donc (d) est incluse dans (P')

les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires donc se coupent suivant une droite donc les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).

3. $d = d(\text{A}, (\text{P})) = \dfrac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{|x_A + 2y_A - z_A + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

d' $= d(\text{A}, (\text{P'})) = \dfrac{|-x_A + y_A + z_A|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{|1+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. Notons H et H' les projetés orthogonaux de A sur (P) et sur (P'). Les deux plans (P) et (P') sont orthogonaux, le projeté orthogonal D de H sur (P') est confondu avec le projeté orthogonal de H' sur (P). Le quadrilatère AHDH' est donc un rectangle. Soit δ la distance entre A et (d).

δ est la longueur de la diagonale de ce rectangle. On applique le théorème de Pythagore : $\delta^2 = d^2 + d'^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2$

donc $\delta = \sqrt{2}$

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances

La dérivée de $u\,v$ est $u'\,v + v'\,u$ donc $u'\,v = (u\,v)' - v'\,u$ donc $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$

$u\,v$ est une fonction continue dérivable sur $[a ; b]$; une primitive de $(u\,v)'$ est $u\,v$ donc :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

2. Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \,\mathrm{d}x$

a. $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{x} & \text{alors} \quad u(x) = \mathrm{e}^{x} \\ v(x) = \sin x & \text{alors} \quad v'(x) = \cos x \end{cases}$ donc I = $\left[\ \mathrm{e}^{x} \sin x\ \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \cos x \, \mathrm{d}x$ soit I = $-\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \cos x \, \mathrm{d}x$ donc I = − J

$\begin{cases} u'(x) = \sin x & \text{alors} \quad u(x) = -\cos x \\ v(x) = \mathrm{e}^{x} & \text{alors} \quad v'(x) = \mathrm{e}^{x} \end{cases}$ donc I = $\left[\ -\mathrm{e}^{x} \cos x\ \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\mathrm{e}^{x} \cos x \, \mathrm{d}x$

soit I = $\mathrm{e}^{\pi} - (-1) + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x} \cos x \, \mathrm{d}x$ donc I = J + e^{π} + 1.

b. I = J + e^{π} + 1 donc I – J = e^{π} + 1 or I = − J soit 2 I = e^{π} + 1 donc I = $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi} + 1)$ et J = $-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi} + 1)$.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = 0$ où z est un nombre complexe.

1. $\mathrm{i}^2 = -1$ donc $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ donc si $z = \mathrm{i}$ alors $z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = -\mathrm{i} + (4 + \mathrm{i}) + (13 + 4 \mathrm{i}) \mathrm{i} - 13 \mathrm{i}$

$z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = -\mathrm{i} + 4 + \mathrm{i} + 13 \mathrm{i} - 4 - 13 \mathrm{i} = 0$

Le nombre complexe i est solution de l'équation (E).

2. $z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = z^2 (z - \mathrm{i}) - 4 z^2 + 13 z + 4 \mathrm{i} z - 13 \mathrm{i} = z^2 (z - \mathrm{i}) - 4 z (z - \mathrm{i}) + 13 (z - \mathrm{i})$

$z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = (z - \mathrm{i}) (z^2 - 4 z + 13)$

3. $z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i}) (z^2 - 4 z + 13) = 0 \Leftrightarrow z - \mathrm{i} = 0$ ou $z^2 - 4 z + 13 = 0$

$z^2 - 4 z + 13 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 13 = -36 = (6 \mathrm{i})^2$ donc $z_1 = \dfrac{2 - 6 \mathrm{i}}{2} = 2 - 3 \mathrm{i}$ ou $z_2 = 2 + 3 \mathrm{i}$

$z^3 - (4 + \mathrm{i}) z^2 + (13 + 4 \mathrm{i}) z - 13 \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $z = 2 + 3 \mathrm{i}$ ou $z = 2 - 3 \mathrm{i}$

Les solutions de l'équation (E) sont i ; 2 + 3 i ; 2 – 3 i

Partie B

1. La rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ a pour écriture complexe : $z' - (2 + 3 \mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} [z - (2 + 3 \mathrm{i})]$.

l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r est $a' = (2 + 3 \mathrm{i}) + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) [\mathrm{i} - (2 + 3 \mathrm{i})]$.

soit $a' = (2 + 3 \mathrm{i}) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mathrm{i}) (-2 - 2 \mathrm{i}) = (2 + 3 \mathrm{i}) - \sqrt{2}\ (1 + \mathrm{i})^2 = 2 + 3 \mathrm{i} - 2\sqrt{2}\, \mathrm{i}$ donc $a' = 2 + \mathrm{i} (3 - 2\sqrt{2})$

2. $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $-6 \mathrm{i}$; $\overrightarrow{BA'}$ a pour affixe $-2\sqrt{2}\, \mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{BA'} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{BC}$. Les points A′, B et C sont alignés.

l'homothétie de centre B qui transforme C en A′ a pour rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ donc l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′ est $z' - b = \dfrac{\sqrt{2}}{3} (z - b)$ soit $z' - (2 + 3 \mathrm{i}) = \dfrac{\sqrt{2}}{3} (z - 2 - 3 \mathrm{i})$.

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. s est la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

Le rapport de s est $k = \dfrac{\text{AH}}{\text{AC}} = \dfrac{|h-a|}{|c-a|} = \dfrac{|-6\,\text{i}|}{|8-8\,\text{i}|} = \dfrac{6}{8\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

L'angle de s est $(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AH}}) = \arg\dfrac{h-a}{c-a}$ or $\dfrac{h-a}{c-a} = \dfrac{-6\,\text{i}}{8-8\,\text{i}} = \dfrac{-6\,\text{i}\,(1+\text{i})}{8\,(1+\text{i})\,(1-\text{i})} = \dfrac{3}{8}(-1+\text{i})$ donc $\arg\dfrac{h-a}{c-a} = -\dfrac{\pi}{4}$.

2. *a*. Si les points A et C soient invariants par s alors $a\,\overline{z_{\text{A}}} + b = z_{\text{A}}$ et $a\,\overline{z_{\text{C}}} + b = z_{\text{C}}$

donc par différence membre à membre $a\,(\overline{z_{\text{A}}} - \overline{z_{\text{C}}}) = z_{\text{A}} - z_{\text{C}} \Leftrightarrow a\,(-5-6\,\text{i}-3-2\,\text{i}) = -5+6\,\text{i}-3+2\,\text{i} \Leftrightarrow a\,(-8-8\,\text{i}) = -8+8\,\text{i}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{-1+\text{i}}{-1-\text{i}} \Leftrightarrow a = -\,\text{i}$

L'écriture complexe de s est donc de la forme $z' = -\,\text{i}\,\overline{z} + b$

s(A) = A donc $b = z_{\text{A}} + \text{i}\,\overline{z_{\text{A}}}$ soit $b = -5+6\,\text{i}+\text{i}\,(-5-6\,\text{i})$ soit $b = 1+\text{i}$

s a pour écriture complexe $z' = -\,\text{i}\,\overline{z} + 1 + \text{i}$

s est une similitude différente de l'identité admettant deux points distincts A et C invariants donc s est la symétrie orthogonale d'axe (AC).

2. *b*. Si s(H) = E alors $z_{\text{E}} = -\,\text{i}\,\overline{z_{\text{H}}} + 1 + \text{i} = 5\,\text{i} + 1 + \text{i}$ donc $z_{\text{E}} = 1 + 6\,\text{i}$

2. *c*. Γ est le cercle de centre F de rayon aF or AF $= |-5-6\,\text{i}-(-2+\text{i})| = |-3-5\,\text{i}| = \sqrt{34}$

EF $= |1+6\,\text{i}-(-2+\text{i})| = |3+5\,\text{i}| = \sqrt{34}$ = AF donc E appartient au cercle Γ.

3. I est le milieu de [AC] donc a pour affixe $\dfrac{z_{\text{A}} + z_{\text{C}}}{2} = -1 + 2\,\text{i}$

Le point G est l'image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$ donc $\overrightarrow{\text{BG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{BI}}$ soit $z_{\text{G}} - z_{\text{B}} = \dfrac{2}{3}(z_{\text{I}} - z_{\text{B}})$

$z_{\text{G}} = \dfrac{2}{3}z_{\text{I}} + \dfrac{1}{3}z_{\text{B}}$ soit $z_{\text{G}} = \dfrac{1}{3}(-2+4\,\text{i}-7-2\,\text{i}) = -3 + \dfrac{2}{3}\,\text{i}$

$\overrightarrow{\text{HF}}$ a pour affixe $-2+\text{i}+5 = 3+\text{i}$

$\overrightarrow{\text{HG}}$ a pour affixe $-3 + \dfrac{2}{3}\,\text{i} + 5 = 2 + \dfrac{2}{3}\,\text{i} = \dfrac{2}{3}(3+\text{i})$ donc $\overrightarrow{\text{HG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{HF}}$

Les points H, G et F sont alignés.

Remarques :

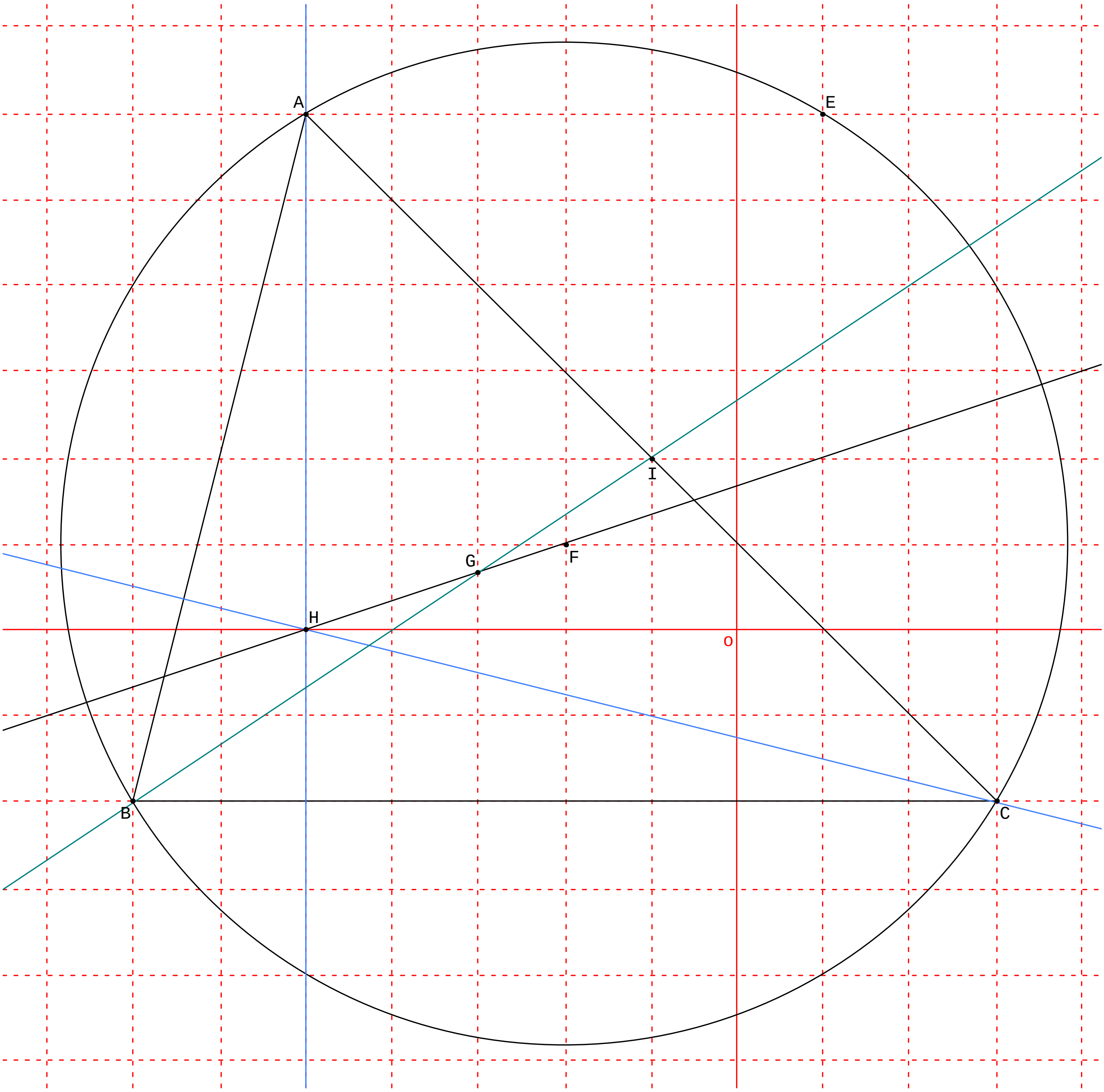
I est le milieu du côté [AC] du triangle ABC donc (BI) est une médiane de ce triangle

$\overrightarrow{\text{BG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{BI}}$ donc G est le centre de gravité de ce triangle (au $\dfrac{2}{3}$ de la médiane à partir du sommet)

On retrouve ici deux propriétés des triangles :

le centre du cercle circonscrit F, le centre de gravité G et l'orthocentre H sont alignés et $\overrightarrow{\text{HG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{HF}}$

Le symétrique orthogonal E de l'orthocentre H du triangle ABC par rapport au côté (AC) de ce triangle appartient au cercle circonscrit Γ à ce triangle


A
E
I
G
F
H
O
B
C

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

1. Réponse *d*

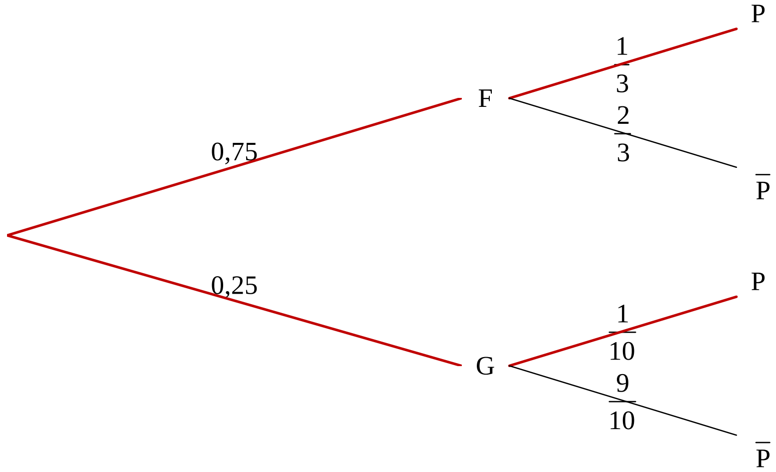
On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- le représentant de commerce vend un produit ($p = 0{,}2$)
- le représentant de commerce vend un produit ($q = 1 - p = 0{,}8$)

donc la variable aléatoire comptant le nombre de produits vendus suit une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,2).

$p(\mathrm{X} = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^3 \approx 0{,}2048$

2. Réponse *b*



$p(\mathrm{G} \cap \mathrm{P}) = 0{,}25 \times \frac{1}{10} = 0{,}025$ et $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{P}) = 0{,}75 \times \frac{1}{3} = 0{,}25$

La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{P}) + p(\mathrm{G} \cap \mathrm{P}) = 0{,}75 \times \frac{1}{3} + 0{,}25 \times \frac{1}{10} = 0{,}275$

3. Réponse *b*

$p_{\mathrm{P}}(\mathrm{G}) = \frac{p(\mathrm{P} \cap \mathrm{G})}{p(\mathrm{P})} = \frac{0{,}025}{0{,}275} \approx 0{,}091$

4. Réponse *a*

L'aire d'un disque de rayon 10 est $\mathrm{A}_1 = \pi \times 10^2 = 100\,\pi$

L'aire d'un disque de rayon 20 est $\pi \times 20^2 = 400\,\pi$

L'aire de la couronne comprise entre ces deux cercles est donc :

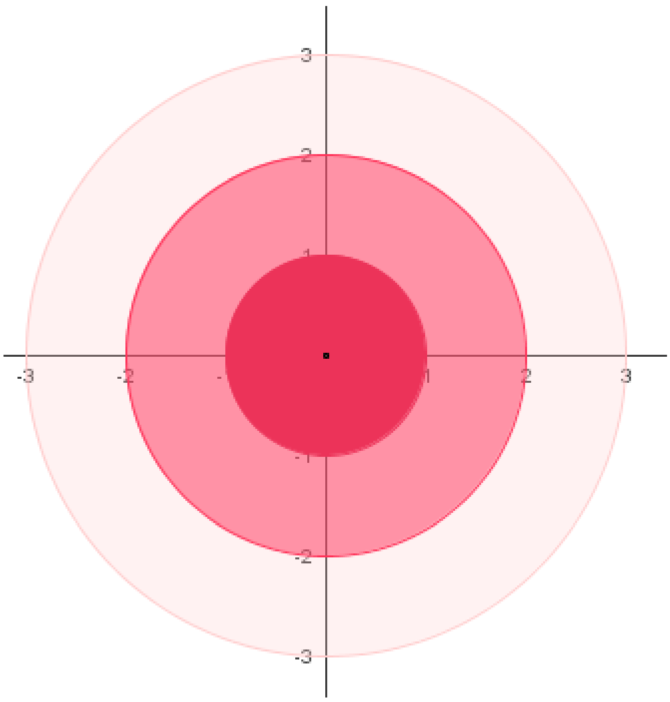
$\mathrm{A}_2 = 400\,\pi - 100\,\pi = 300\,\pi$ soit $\mathrm{A}_2 = 3\,\mathrm{A}_1$

L'aire d'un disque de rayon 30 est $\pi \times 30^2 = 900\,\pi$

L'aire d'un disque de rayon 20 est $\pi \times 20^2 = 400\,\pi$

L'aire de la couronne comprise entre ces deux cercles est donc :

$900\,\pi - 400\,\pi = 500\,\pi$ soit $\mathrm{A}_3 = 5\,\mathrm{A}_1$



La propriété que le tireur atteigne la zone rouge est p_1.

La propriété que le tireur atteigne la zone rose foncé est :

$p_2 = 3\,p_1$

La propriété que le tireur atteigne la zone rose est $p_3 = 5\,p_1$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ donc $9\,p_1 = 1$ et $p_1 = \frac{1}{9}$ et $p_3 = \frac{5}{9}$

EXERCICE 5 5 points Commun à tous les candidats

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe C

1. $f'(x) = 1 - \dfrac{(1+x)\dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

N est définie dérivable sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, $N'(x) = 2(1+x) + \dfrac{1}{1+x}$

$x > -1$ donc $1 + x > 0$ et $N'(x) > 0$ donc N est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
$N(0) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$ et N est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc si $-1 < x < 0$ alors $N(x) < N(0)$ soit $N(x) < 0$
si $x > 0$, $N(x) > N(0)$ donc $N(x) > 0$.

$f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $N(x)$.

si $-1 < x < 0$ alors $N(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-1\,;0[$.
si $x \geq 0$ alors $N(x) \geq 0$.donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D il faut résoudre $f(x) = x$
soit résoudre $]-1\,;+\infty[$, $x = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \Leftrightarrow x \in\ ]-1\,;+\infty[, \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-1\,;+\infty[, \ln(1+x) = 0$

$\Leftrightarrow x \in\ ]-1\,;+\infty[,\ 1 + x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
Les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D sont $(0\,;0)$.

Partie B : Etude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction *f* .

1. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc si $0 \leq x \leq 4$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ soit $0 \leq f(x) \leq 4 - \dfrac{\ln 5}{5} \leq 4$

donc si $x \in [0\,;4]$, alors $f(x) \in [0\,;4]$.

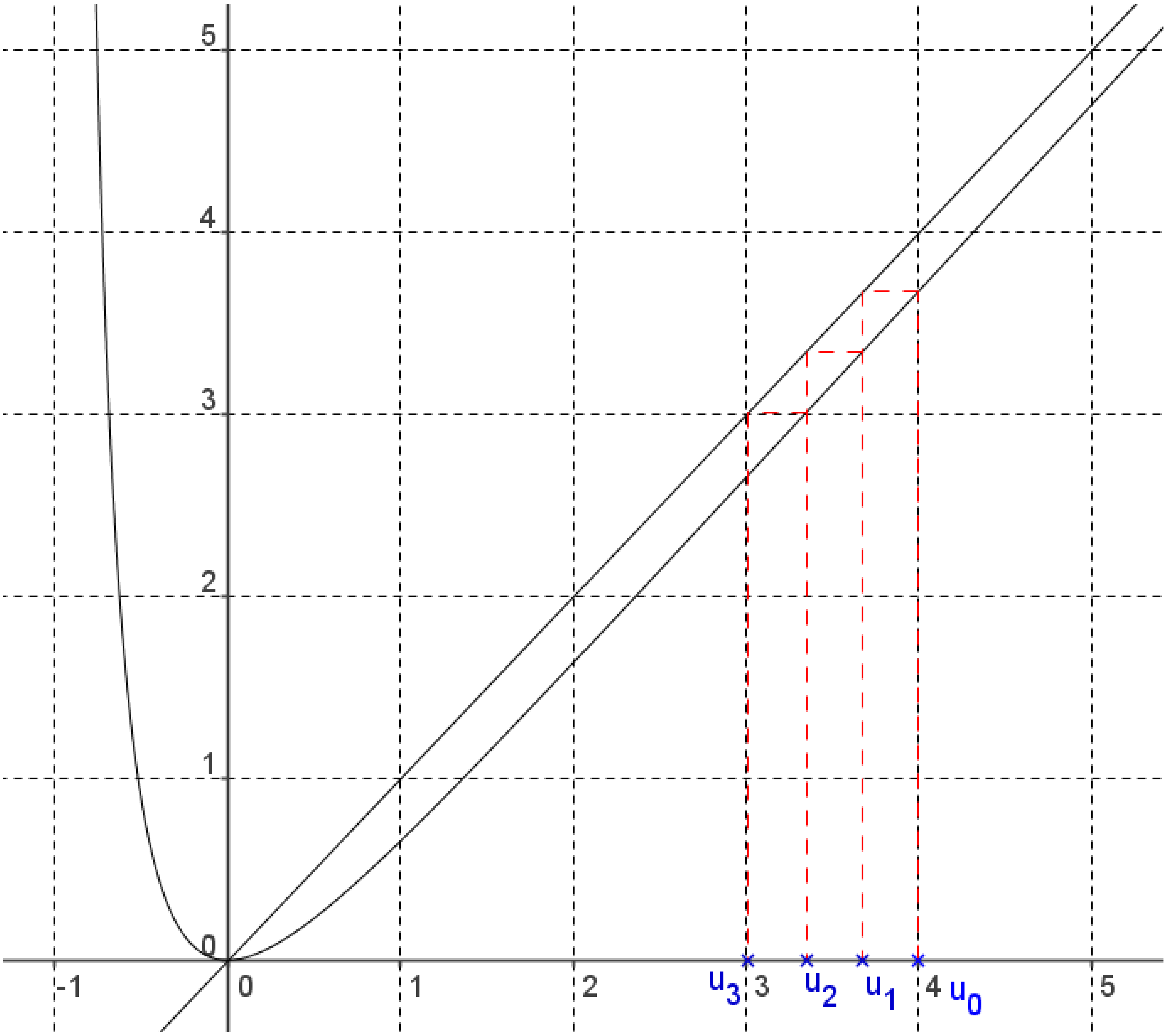
2. *b.* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 4$
$u_0 = 4$ donc $0 \leq u_0 \leq 4$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Montrons qu'elle est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $0 \leq u_n \leq 4$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

f est strictement croissante sur $[0\,;4]$ donc si $0 \leq u_n \leq 4$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$
or pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = f(u_n)$; $f(0) = 0$ et $f(4) \leq 4$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} - u_n = -\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}$

$0 \leq u_n \leq 4$ donc $1 + u_n \leq 1$ donc $\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante minorée par 0 donc est convergente. On note ℓ sa limite alors $0 \leq \ell \leq 4$.
e. Pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = f(u_n)$; la fonction f est continue sur $[0\,;4]$ et pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;4]$, la suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est solution de $f(x) = x$.
D'après la question 2. de la Partie II, l'équation $f(x) = x$ admet pour seule solution 0 donc $\ell = 0$.



5
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
u3
3
u2
u1
4
u0
5