Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de – 1, fait correspondre le point M' d'affixe $\frac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{2}$; $z_B = -\frac{1}{2} + \text{i}$ et $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$.

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.
b. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, et placer les points A', B' et C' sur la figure.
c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z + 1$.
a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite D_1, image de la droite D par g.
c. Démontrer que D_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z - 1| = |z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.

a. Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |z|$.

c. En déduire que l'image par h de la droite D_1 est incluse dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite D_1 est le cercle C privé de O.
4. Déterminer l'image par l'application f de la droite D.

CORRECTION

1. ***a.***

b. $A' = f(A)$ a pour affixe : $\frac{1}{-0,5+1} = 2$

$B' = f(B)$ a pour affixe : $\frac{1}{-0,5+\text{i}+1} = \frac{1}{0,5+\text{i}} = \frac{2}{1+2\text{i}}$ donc $b' = \frac{2(1-2\text{i})}{(1+2\text{i})(1-2\text{i})}$ donc $b' = 0,4 - 0,8\text{i}$

$C' = f(C)$ a pour affixe : $\frac{1}{-0,5-0,5\text{i}+1} = \frac{1}{0,5+0,5\text{i}}$ donc $c' = 2\,\frac{1+\text{i}}{(1+\text{i})(1-\text{i})}$ donc $c' = 1 + \text{i}$

c. $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées (0,4 – 2 ; – 0,8) soit (– 1,6 ; – 0,8)
$\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées (1 – 2 ; 1) soit (– 1 ; 1)
Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires or les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
f ne transforme pas la droite D en une autre droite.

2. ***a.*** Le plan complexe est muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}$ a pour affixe 1 or $(z + 1) - z = 1$ donc pour tout point M du plan $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ donc g est une translation de vecteur $\vec{u}$.

b. D_1 est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

c. $|z - 1| = |z| \Leftrightarrow$ MD = OM où D est le point d'affixe 1
L'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z - 1| = |z|$ est la médiatrice du segment [OD] donc est la droite D_1.

3. ***a.*** A_1 a pour affixe $\frac{1}{2}$ donc $h(A_1)$ a pour affixe $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ donc $h(A_1) = A'$,

B_1 a pour affixe $\frac{1}{2} + \text{i}$ donc $h(B_1)$ a pour affixe $\frac{1}{\frac{1}{2}+\text{i}} = \frac{2}{1+2\text{i}}$ soit $\frac{2(1-2\text{i})}{(1-2\text{i})(1+2\text{i})} = \frac{2(1-2\text{i})}{5} = 0,4 - 0,8\text{i}$
donc $h(B_1) = B'$
C_1 a pour affixe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$ donc $h(CB_1)$ a pour affixe $\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{i}} = \frac{2}{1-\text{i}}$ soit $1 + \text{i}$ donc $h(C_1) = C'$.

b. Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$\left|\frac{1}{z}-1\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-z}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|1-z|}{|z|}=1 \Leftrightarrow |1-z| = |z|$ or $1-z=-(z-1)$ donc $|1-z|=|z-1|$

$\left|\frac{1}{z}-1\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z|$.

c. Soit E l'image par h de la droite D_1.

M' $\in$ E $\Leftrightarrow$ il existe un point M (d'affixe z non nulle) appartenant à D tel que $z' = \frac{1}{z}$

La droite D_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-1|=|z|$

M' $\in$ E $\Leftrightarrow$ il existe un point M d'affixe z non nulle telle que $|z-1|=|z|$ et $z \neq 0$ donc $\left|\frac{1}{z}-1\right|=1$ donc $|z'-1|=1$ soit DM' = 1

donc M' appartient au cercle de centre D de rayon 1.
E est incluse dans le cercle de centre D de rayon 1.

4. $M(z) \xrightarrow[g]{} M_1(z_1) \xrightarrow[h]{} M'(z')$

$f = h \circ g$ or la droite D est transformé par g en D_1

D_1 est transformée par h en E donc l'image par l'application f de la droite D est l'ensemble E soit le cercle de centre D de rayon 1 privé de O.