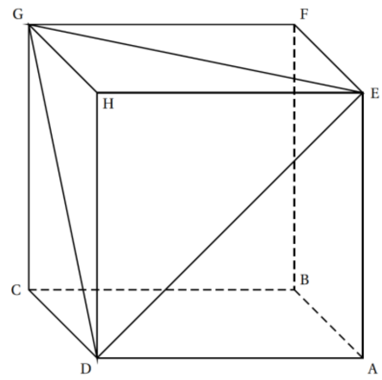
Antilles Guyane septembre 2016



On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.
On se place dans le repère orthonormé $(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH). Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

CORRECTION

Dans le repère orthonormé $(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$:

B a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0), H (1 ; 1 ; 1), D (1 ; 1 ; 0) ; E (1 ; 0 ; 1) G (0 ; 1 ; 1).

1. La droite (BH) est l'ensemble des points M (x ; y ; z) tels qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BH}$.

Une représentation paramétrique de la droite (BH) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).

2. $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées (0 ; – 1 ; 1) et $\overrightarrow{DG}$ (– 1 ; 0 ; 1)

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BH} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

$\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{BH} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$

(BH) est orthogonale à deux droites sécantes (DE) et (DG) du plan (DEG) donc la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. (BH) est perpendiculaire au plan (DEG) donc $\overrightarrow{BH}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (DEG) donc (DEG) a une équation de la forme $1\,x + 1\,y + 1\,z + d = 0$

D appartient au plan (DEG) donc $1 + 1 + 0 + d = 0$ soit $d = -2$

Une équation cartésienne du plan (DEG) est $x + y + z - 2 = 0$

4. P appartient à la droite (BH) donc il existe un réel t tel que P (t ; t ; t)

P $\in$ (DEG) donc $t + t + t - 2 = 0$ soit $3\,t - 2 = 0$ donc $t = \frac{2}{3}$.

P a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

5. $PD^2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$

$PE^2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

$PG^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

P appartient au plan (DEG) et PD = PE = PG donc P est le centre du cercle circonscrit du triangle DEG.