Dans chacun des exercices, il s'agit (sauf précision supplémentaire) de déterminer une primitive de la fonction *f*

Règles utilisées :
x^n a pour primitive : $\dfrac{x^n}{n+1}$
U étant une primitive de u
V étant une primitive de v
$u + v$ a pour primitive : U + V
$k\,u$ a pour primitive : k U (k constante)

EXERCICE 1

a. $f(x) = -1 + x + \dfrac{x^3}{2} + x^5$

$f(x) = -1 + x + \dfrac{1}{2}x^3 + x^5$

$F(x) = -x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + k \ (k \in \mathbb{R})$

$F(x) = -x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{8}x^4 + \dfrac{1}{6}x^6 + k$

b. $f(x) = -(x-1)^2(x+1)$
En développant, on obtient :
$f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$

$F(x) = -\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x + k$

EXERCICE 2

a. $f(x) = 1 + 2x$

$F(x) = x + x^2 + k$

b. $f(x) = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{7}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x^4$

$F(x) = -\dfrac{5}{4}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{3}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^5}{5} + k$

$F(x) = -\dfrac{5}{8}x^2 + \dfrac{7}{9}x^3 + \dfrac{1}{10}x^5 + k$

EXERCICE 3

a. $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$f(x) = x + x^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k$ or $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ et $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} + k$

b. $f(x) = 8x + \dfrac{1}{2}x^2 - \pi$

$F(x) = 8\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^3}{3} - \pi x + k$

$F(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 - \pi x + k$

EXERCICE 4

a. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$
$f(x) = -x^{-2} + x^{-3}$

$F(x) = -\dfrac{x^{-1}}{-1} + \dfrac{x^{-2}}{-2} + k$

$F(x) = x^{-1} - \dfrac{1}{2}x^{-2} + k$

$F(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^2} + k$

$F(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + k$

b. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^5} + \dfrac{1}{x^5}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^5}$
$f(x) = x^{-3} + x^{-5}$

$F(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2} + \dfrac{x^{-4}}{-4} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-2} - \dfrac{1}{4}x^{-4} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{x^4} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^4} + k$

EXERCICE 5

a. $f(t) = \dfrac{4t^3 + 5t^2 + 7}{t^2}$

$f(t) = \dfrac{4t^3}{t^2} + \dfrac{5t^2}{t^2} + \dfrac{7}{t^2}$

$f(t) = 4t + 5 + 7\times\dfrac{1}{t^2}$

$f(t) = 4t + 5 + 7\times t^{-2}$

$F(t) = 2t^2 + 5t + 7\dfrac{t^{-1}}{-1} + k$

$F(t) = 2t^2 + 5t - 7t^{-1} + k$

$F(t) = 2t^2 + 5t - 7\times\dfrac{1}{t} + k$

$F(t) = 2t^2 + 5t - \dfrac{7}{t} + k$

Règle utilisée :

$u' u^n$ a pour primitive $\dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$ si $n \neq -1$

b. $f(t) = 3\,(3t^2 - 6)\,(t^3 - 6t)^2$

On peut développer ou bien dans ce cas poser :

$u(t) = t^3 - 6t$

$u'(t) = 3t^2 - 6$

donc $f(t) = 3\,u'(t)\,[u(t)]^2$

ici $n = 2$, $n + 1 = 3$ donc $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{3}$

donc $F(t) = 3 \times \dfrac{1}{3} u^3 + k$

$F(t) = (t^3 - 6t)^3 + k$

EXERCICE 6

a. $f(x) = 4\,(2x + 5)\,(x^2 + 5x + 1)^3$

$u(x) = x^2 + 5x + 1$

$u'(x) = 2x + 5$

donc $f(x) = 4\,u'(x)\,[u(x)]^3$

ici $n = 3$ donc $F(x) = 4 \times \dfrac{1}{4} u^4 + k$

$F(x) = (x^2 + 5x + 1)^4 + k$

b. $f(t) = (2t + 4)\,(t^2 + 4t - 7)^3$

$u(t) = t^2 + 4t - 7$

$u'(t) = 2t + 4$

donc $f(t) = u'(t)\,[u(t)]^3$

ici $n = 3$, $n + 1 = 4$ donc $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{4}$

donc $F(t) = \dfrac{1}{4} u^4 + k$

$F(t) = (t^2 + 4t - 7)^4 + k$

EXERCICE 7

a. $f(x) = \dfrac{-3}{(3x-1)^2}$

$f(x) = -3 \times \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

$f(x) = -3\,(3x - 1)^{-2}$

soit $u(x) = 3x - 1$

$u'(x) = 3$

$f(x) = -u'\,u^{-2}$

ici $n = -2$ donc $n + 1 = -1$, donc $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$F(x) = -(-1)\,u^{-1} + k$

$F(x) = u^{-1} + k$

$F(x) = \dfrac{1}{u(x)} + k$

$F(x) = \dfrac{1}{3x-1} + k$

b. $f(t) = \dfrac{5t+5}{\sqrt{t^2+2t+3}}$

$f(t) = (5t + 5) \times \dfrac{1}{\sqrt{t^2+2t+3}}$

$f(t) = 5\,(t+1)\,(t^2 + 2t + 3)^{-\frac{1}{2}}$

soit $u(t) = t^2 + 2t + 3$

$u'(t) = 2t + 2$

$u'(t) = 2\,(t + 1)$

donc $t + 1 = \dfrac{1}{2} u'(t)$

$f(t) = 5 \times \dfrac{1}{2} u'\,u^{-\frac{1}{2}}$

$f(t) = \dfrac{5}{2} u'\,u^{-\frac{1}{2}}$

ici $n = -\dfrac{1}{2}$, $n + 1 = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{n+1} = 2$

$F(t) = \dfrac{5}{2} \times 2\,u^{\frac{1}{2}} + k = 5\,u^{\frac{1}{2}} + k$

$F(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 3} + k$

EXERCICE 8

a. $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^3}$

$f(x) = (4x + 3)^{-3}$

soit $u(x) = 4x + 3$,

$u'(x) = 4$ donc $1 = \dfrac{1}{4} u'(x)$

$f(x) = u^{-3} = 1 \times u^{-3}$

$f(x) = \dfrac{1}{4} u'\,u^{-3}$

ici $n = -3$, $n + 1 = -2$, $\dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{1}{2}$

$F(x) = \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) u^{-2} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{u^2} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{8\,(4x+3)^2} + k$

b. $f(x) = \dfrac{\frac{3}{2}x^2 + 1}{(x^3 + 2x)^3}$

$f(x) = \left(\dfrac{3}{2}x^2 + 1\right) \times \dfrac{1}{(x^3+2x)^3}$

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{2} \times (x^3 + 2x)^{-3}$

$f(x) = \dfrac{1}{2}\,(3x^2 + 2)\,(x^3 + 2x)^{-3}$

soit $u(x) = x^3 + 2x$

$u'(x) = 3x^2 + 2$

donc $f(x) = \dfrac{1}{2} u'\,u^{-3}$

ici $n = -3$, $n + 1 = -2$, $\dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{1}{2}$

$F(x) = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) u^{-2} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{u^2} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{4(x^3+2x)^2} + k$

EXERCICE 9

Déterminer la primitive F de *f* telle que

$f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et $F(0) = 7$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x + k$

$F(0) = k = 7$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x + 7$

EXERCICE 10

Déterminer la primitive F de *f* telle que

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = 0$

$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}$

$F(x) = 2\,x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{x^{-1}}{-1} + k$

$F(x) = 2\,x^{\frac{1}{2}} + x^{-1} + k$

$F(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + k$

$F(1) = 2\sqrt{1} + 1 + k = 0$

donc $3 + k = 0$ donc $k = -3$

$F(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 3$

EXERCICE 11

Déterminer la primitive F de *f* telle que

$f(x) = (2x-3)(x^2-3x-6)^2$ et $F(-1) = 9$

soit $u(x) = x^2 - 3x - 6$

$u'(x) = 2x - 3$

$f(x) = u'\,u^2$

$F(x) = \dfrac{1}{3}u^3 + k$

$F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 - 3x - 6)^3 + k$

$F(-1) = \dfrac{1}{3}(1 + 3 - 6)^3 + k = 9$

$F(-1) = -\dfrac{8}{3} + k = 9$

donc $k = 9 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{25}{3}$

$F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 - 3x - 6)^3 + \dfrac{25}{3}$

EXERCICE 12

Déterminer la primitive F de *f* telle que

$f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}$ et $F(\sqrt{2}) = -2$

$f(x) = 3x \times \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

$f(x) = 3x(x^2+1)^{-2}$

soit $u(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 2x$ donc $x = \dfrac{1}{2}u'(x)$

$f(x) = 3 \times \dfrac{1}{2}u'\,u^{-2}$

$f(x) = \dfrac{3}{2}\,u'\,u^{-2}$

ici $n = -2$, $n + 1 = -1$, $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$F(x) = \dfrac{3}{2} \times (-1)\,u^{-1} + k$

$F(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{u} + k$

$F(x) = -\dfrac{3}{2(x^2+1)} + k$

$F(\sqrt{2}) = -\dfrac{3}{2(2+1)} + k = -2$

donc $-\dfrac{1}{2} + k = -2$

$k = -\dfrac{3}{2}$

EXERCICE 13

Déterminer la primitive F de *f* telle que

$f(x) = \sqrt{x}$ et $F(9) = 20$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$n = \dfrac{1}{2}$, donc $n + 1 = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{3}$

$F(x) = \dfrac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}} + k$

$F(x) = \dfrac{2}{3} \times x^{1+\frac{1}{2}} + k$

$F(x) = \dfrac{2}{3} \times x \times x^{\frac{1}{2}} + k$

$F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + k$

$F(9) = \dfrac{2}{3} \times 9\sqrt{9} + k = 20$

$F(9) = 18 + k = 20$

donc $k = 2$

$F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + 2$

Règles utilisées :

$\frac{1}{x}$ a pour primitive : ln | x |

$\frac{u'}{u}$ a pour primitive : ln | u |

$u'\,u^{n}$ a pour primitive $\frac{1}{n+1}\,u^{n+1}$ si $n \neq -1$

EXERCICE 14

a. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$u(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 2x$ donc $x = \frac{1}{2}\,u'(x)$

$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| + k$

or $x^2 + 1 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc :

$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$

b. $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$

$u(x) = x + 1$

$u'(x) = 1$

$f(x) = 1 + \frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = x + \ln|u(x)| + k$

or $x + 1 > 0$ pour tout x de $]-1\,;+\infty[$ donc :

$F(x) = x + \ln(x+1) + k$

EXERCICE 15

a. $f(x) = \frac{1}{3x+1}$

$u(x) = 3x + 1$

$u'(x) = 3$ donc $1 = \frac{1}{3}\,u'(x)$

$f(x) = \frac{1}{3}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \frac{1}{3}\ln|u(x)| + k$

or $3x + 1 > 0$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ donc :

$F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x+1) + k$

b. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$

$f(x) = x^{-2} + \frac{1}{x} + 1$

donc $F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x| + x + k$

or $x > 0$

donc : $F(x) = -\frac{1}{x} + \ln x + x + k$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 16

a. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

$u(x) = \sin x$

$u'(x) = \cos x$

$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \ln|u(x)| + k$

or $\sin x > 0$ pour tout x de $]0\,;\pi[$ donc :

$F(x) = \ln(\sin x) + k$

b. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$u(x) = \ln x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = u'(x)\,u(x)$ de la forme $u'\,u^{n}$ avec $n = 1$

donc $F(x) = \frac{1}{2}[u(x)]^2 + k$

donc : $F(x) = = \frac{1}{2}[\ln x]^2 + k$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 17

a. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$

$u(x) = x^2 + 2x + 3$

$u'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$

$x + 1 = \frac{1}{2}\,u'(x)$

$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| + k$

or $x^2 + 2x + 3 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc :

$F(x) = \ln(x^2 + 2x + 3) + k$

b. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

$u(x) = \ln x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \ln|u(x)| + k$

or $\ln x > 0$ pour tout x de $]1\,;+\infty[$

donc : $F(x) = = \ln[\ln x] + k$ pour tout x de $]1\,;+\infty[$.

EXERCICE 18

a. $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

$u(x) = 2x - 3$

$u'(x) = 2$ donc $1 = \frac{1}{2}\,u'(x)$

$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \frac{1}{2} \ln | u(x) | + k$

or $2x - 3 > 0$ pour tout x de $\left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[$ donc :

$F(x) = \ln (2x - 3) + k$ pour tout x de $\left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[$.

b. $f(x) = \frac{1}{2x - 3}$

$u(x) = 2x - 3$

$u'(x) = 2$ donc $1 = \frac{1}{2} u'(x)$

$f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \frac{1}{2} \ln | u(x) | + k$

or $2x - 3 < 0$ pour tout x de $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[$

donc $| 2x - 3 | = -(2x - 3) = 3 - 2x$

$F(x) = \ln (3 - 2x) + k$ pour tout x de $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[$.

EXERCICE 19

a. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

$u(x) = x + 2$
$u'(x) = 1$

$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = \ln | u(x) | + k$
or $x + 2 < 0$ pour tout x de $] -\infty ; 2 [$
donc $| x + 2 | = -(x + 2) = -x - 2$
$F(x) = \ln (-x - 2) + k$ pour tout x de $] -\infty ; 2 [$

b. $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

$u(x) = 1 - x$
$u'(x) = -1$ donc $1 = -u'(x)$

$f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = -\ln | u(x) | + k$
or $1 - x < 0$ pour tout x de $] 1 ; +\infty [$
donc $| 1 - x | = -(1 - x) = x - 1$
$F(x) = \ln (x - 1) + k$ pour tout x de $] 1 ; +\infty [$.

EXERCICE 20

$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

soit $u(x) = x + 1$ alors $u'(x) = 1$
$v(x) = x - 1$ alors $v'(x) = 1$

donc $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$

donc $F(x) = \ln | u(x) | + \ln | v(x) | + k$
pour tout x de $] -1 ; 1 [$, $u(x) > 0$ donc $| u(x) | = x + 1$
et $v(x) < 0$ donc $| v(x) | = -v(x) = -(x - 1) = 1 - x$
donc $F(x) = \ln (x + 1) - \ln (1 - x) + k$.

EXERCICE 21

$f(x) = 1 + 3x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$u(x) = x + 1$
$u'(x) = 1$

$f(x) = 1 + 3x - \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{u'(x)}{u^2(x)}$

$f(x) = 1 + 3x - \frac{u'(x)}{u(x)} + u'(x)\, u^{-2}(x)$

on a un mélange de plusieurs règles :

$1 + 3x$ a pour primitive : $1 + \frac{3}{2} x^2$

$\frac{u'(x)}{u(x)}$ a pour primitive : $\ln | u(x) |$

$u'(x)\, u^{-2}(x)$ a pour primitive : $\frac{u^{-1}}{-1}$

donc f a pour primitive F :

$F(x) = 1 + \frac{3}{2} x^2 + \ln | u(x) | - \frac{1}{u(x)} + k$

or $x + 1 > 0$ pour tout x de $] -1 ; +\infty [$
donc $| x + 1 | = x + 1$

$F(x) = 1 + \frac{3}{2} x^2 + \ln (x + 1) - \frac{1}{x+1} + k$

pour tout x de $] -1 ; +\infty [$.

EXERCICE 22

$f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}$

Déterminer a et b deux réels tels que $f(x) = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x - 3}$

en déduire une primitive de f

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

$\frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x - 3} = \frac{a(x - 3) + b(x - 2)}{(x - 3)(x - 2)}$

$= \frac{(a + b)x - 3a - 2b}{x^2 + 5x + 6} = f(x)$

donc pour tout x de $] 3 ; +\infty [$: $(a + b)x - 3a - 2b = x - 5$

soit $\begin{cases} a + b = 1 \\ -3a - 2b = -5 \end{cases}$

donc $a = 3$ et $b = -2$

soit $f(x) = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 3}$

$u(x) = x - 2$ alors $u'(x) = 1$
$v(x) = x - 3$ alors $v'(x) = 1$

donc $f(x) = 3 \frac{u'(x)}{u(x)} - 2 \frac{v'(x)}{v(x)}$

donc $F(x) = 3 \ln | u(x) | - 2 \ln | v(x) | + k$
pour tout x de $] 3 ; +\infty [$, $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$
donc $F(x) = 3 \ln (x - 2) - 2 \ln (x - 3) + k$.

EXERCICE 23

$f(x) = \dfrac{6x^2 - 17x + 13}{x-2}$

Déterminer a, b et c trois réels tels que :

$f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-2}$

en déduire une primitive de f

$a\,x + b + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{a\,x\,(x-2) + b\,(x-2) + c}{(x-2)}$

$= \dfrac{a\,x^2 + (-2a+b)\,x - 2b + c}{x-2} = f(x)$

donc pour tout x de $]\,2\,;+\infty\,[$:

$a\,x^2 + (-2a+b)\,x - 2b + c = 6x^2 - 17x + 13$

soit $\begin{cases} a = 6 \\ -2a + b = -17 \\ -2b + c = 13 \end{cases}$

donc $a = 6$ et $b = -5$ et $c = 3$

soit $f(x) = 6x - 5 + \dfrac{3}{x-2}$

$u(x) = x - 2$ alors $u'(x) = 1$

donc $f(x) = 6x - 5 + 3\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc $F(x) = 3x^2 - 5x + 3\ln|u(x)| + k$

pour tout x de $]\,2\,;+\infty\,[$, $u(x) > 0$

donc $F(x) = 3x^2 - 5x + 3\ln(x-2) + k$.

EXERCICE 24

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{(1+x)^2}$

Déterminer a, b, c et d quatre réels tels que :

$f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{1+x} + \dfrac{d}{(1+x)^2}$

en déduire une primitive de f

$a\,x + b + \dfrac{c}{1+x} + \dfrac{d}{(1+x)^2} =$

$\dfrac{a\,x\,(1+x)^2 + b\,(1+x)^2 + c\,(1+x) + d}{(1+x)^2}$

$= \dfrac{a\,x^3 + (2a+b)\,x^2 + (a+2b+c)\,x + b + c + d}{(1+x)^2} = f(x)$

donc pour tout x de $]-1\,;+\infty\,[$:

$a\,x^3 + (2a+b)\,x^2 + (a + b + c)\,x + b + c + d$

$= x^3 + 3x^2 + 4x + 3$

soit $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a + 2b + c = 4 \\ b + c + d = 3 \end{cases}$

donc $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$

soit $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} =$

$u(x) = x + 1$ alors $u'(x) = 1$

donc $f(x) = x + 1 + \dfrac{u'(x)}{u(x)} + \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

$f(x) = x + 1 + \dfrac{u'(x)}{u(x)} + u'(x)\,[\,u(x)]^{-2}$

donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 + x + \ln|u(x)| + \dfrac{[u(x)]^{-1}}{-1} + k$

donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 + x + \ln|u(x)| - \dfrac{1}{u(x)} + k$

pour tout x de $]\,2\,;+\infty\,[$, $u(x) > 0$

donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 + x + \ln(x+1) - \dfrac{1}{x+1} + k$.