Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On tracera la figure sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 1 cm.

Partie A : tracé d'une figure

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = -2-4\,i \; ; \; z_B = -6\,i \; ; \; z_C = 3-3\,i.$$

1. Placer le point D tel que le triangle ABD est isocèle rectangle en D, avec $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Construire le point E tel que le triangle OEA est isocèle rectangle en E avec $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EO}) = \frac{\pi}{2}$.

3. Vérifier que l'affixe du point D est $z_D = -4\,i$.

Le but de l'exercice est de montrer de deux manières que les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie B : première méthode

1. Soit g la similitude directe de centre A qui transforme B en D.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude g.

b. En déduire que l'écriture complexe de g est :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) z - 3 - i.$$

c. Justifier que le point E est l'image du point O par la similitude g.

d. En déduire l'affixe du point E.

2. Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$ et conclure pour le problème posé.

Partie C : deuxième méthode

1. On considère la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelle est l'image du point O par cette rotation ? Justifier la réponse.

En déduire la nature du triangle OBC.

2. Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Soit h la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Donner l'angle et le rapport de la similitude $h \circ f$.

b. Quelle est l'image de la droite (BC) par $h \circ f$? Justifier.

c. Conclure pour le problème posé.

CORRECTION

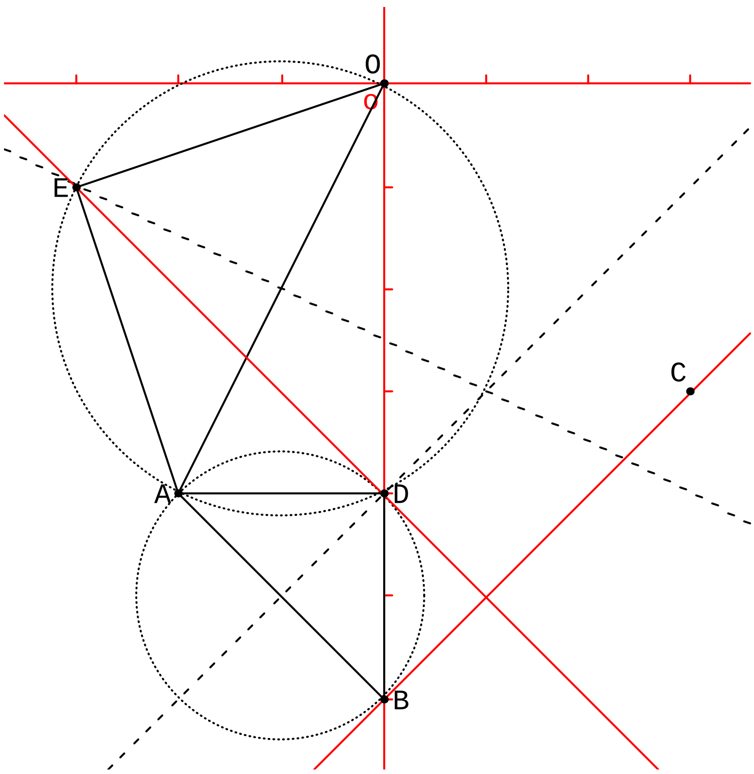
Partie A : tracé d'une figure

1. Le triangle ABD est isocèle rectangle en D, donc D appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] et à la médiatrice Δ de [AB]

$\mathcal{C}$ et Δ se coupent en deux points D et D', un seul de ces deux points vérifie $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Le triangle OEA est isocèle rectangle en E, donc E appartient au cercle $\mathcal{C}$'' de diamètre [OA] et à la médiatrice Δ' de [OA]

$\mathcal{C}$''et Δ' se coupent en deux points E et E', un seul de ces deux points vérifie $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EO}) = \frac{\pi}{2}$.



3. Soit le point M d'affixe $-4\,i$.

$\overrightarrow{AM}$ a pour affixe 2 donc a pour coordonnées $(2 ; 0)$ et $\overrightarrow{BM}$ a pour affixe 2 i donc a pour coordonnées $(0 ; 2)$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 2 \times 0 + 0 \times 2 = 0$ donc le triangle ABM est rectangle en A, et AM = BM = 2 donc le triangle ABM est rectangle isocèle en M donc M = D.

Partie B : première méthode

1. *a.* L'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en D est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Le triangle ABD est rectangle isocèle en D et direct donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$.

Le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en D est $\frac{AD}{AB}$.

Le triangle ABD est rectangle isocèle en D donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 2\ AD^2$ soit $AB = \sqrt{2}\,AD$ donc $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

g est la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. l'écriture complexe de g est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $|\,a\,| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$ donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

donc $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + b$

A est le centre de g donc $z_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_A + b$

$-2-4i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-2-4i) + b \Leftrightarrow -2-4i = (1+i)(-1-2i) + b$

$\Leftrightarrow -2-4i = -1-i-2i+2+b \Leftrightarrow -2-4i = 1-3i+b \Leftrightarrow -3-i = b$

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 3 - i$.

c. Le triangle OAE est rectangle isocèle en E et direct donc $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4}$.

Le triangle OAE est rectangle isocèle en E donc d'après le théorème de Pythagore, $AO^2 = 2\ AE^2$ soit $AO = \sqrt{2}\,AE$ donc $\frac{AE}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{AE}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc E est l'image de O par la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

d. L'image du point O par la similitude g est le point E d'affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times 0 - 3 - i$ soit $-3-i$ donc l'affixe du point E est $-3-i$.

2. $z_B - z_C = -6i - (3-3i) = -3-3i$

$z_E - z_D = -3-i-(-4i) = -3+3i$

$\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D} = \frac{-3-3i}{-3+3i} = i$

Le module $\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$ est 1 et un argument de $\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$ est $\frac{\pi}{2}$ donc BC = DE et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$.

Les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie C : deuxième méthode

1. La rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe : $z' - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$

soit $z' = i\,z - i(3-3i) + 3 - 3i$ soit $z' = i\,z - 3i - 3 + 3 - 3i$ soit $z' = i\,z - 6i$

L'image du point O par cette rotation est le point d'affixe $-6i$ donc est le point B.

Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en C et direct.

2.*a*. $h \circ f$ est la similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit 1 et d'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\pi}{2}$.

$h \circ f$ est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Si MNP est un triangle rectangle isocèle en M et direct alors la similitude de centre N de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ d'angle transforme P en M.

Si MNP est un triangle rectangle isocèle en M et direct alors la similitude de centre P de rapport $\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ d'angle transforme M en N.
donc :

h est la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ le triangle ABD est rectangle isocèle direct en D donc $h(B) = D$.

$h \circ f(B) = h(B) = D$

Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en C et direct donc $f(C) = O$
Le triangle OEA est isocèle rectangle en E et direct donc $h(O) = E$ donc $h \circ f(C) = E$
Une similitude directe transforme une droite en une droite donc $h \circ f$ transforme la droite (BC) en la droite (DE).

c. (BC) est transformée par la rotation $h \circ f$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ en une droite perpendiculaire à (BC) donc les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires
$h \circ f(B) = D$ et $h \circ f(C) = E$ donc BC = DE.