Métropole La Réunion septembre 2017

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1. *a.* Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $-x^2 \leq -2x + 1$, puis : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

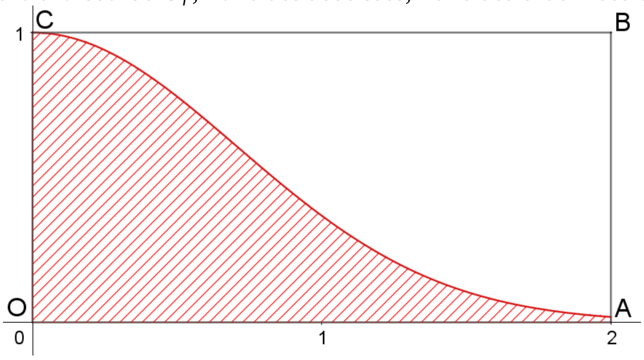
En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \frac{e}{2}$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.

Dans le repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ci-dessous, on a tracé la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = e^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A(2 ; 0), B(2 ; 1) et C(0 ; 1).

On a hachuré le domaine D compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.

On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \frac{\text{aire de D}}{\text{aire de OABC}}$.

a. Justifier que $u_2 = 2p$.

b. On considère l'algorithme suivant :

L1	Variables : N, C nombres entiers; X, Y , F nombres réels
L2	Entrée : Saisir N
L3	Initialisation : C prend la valeur 0
L4	Traitement :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si Y ≤ e^{-X^2} alors
L9	C prend la valeur C + 1
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C/N
L14	Afficher F

i. Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point M(X ; Y) ?

ii. Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.

iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient C = 441138.

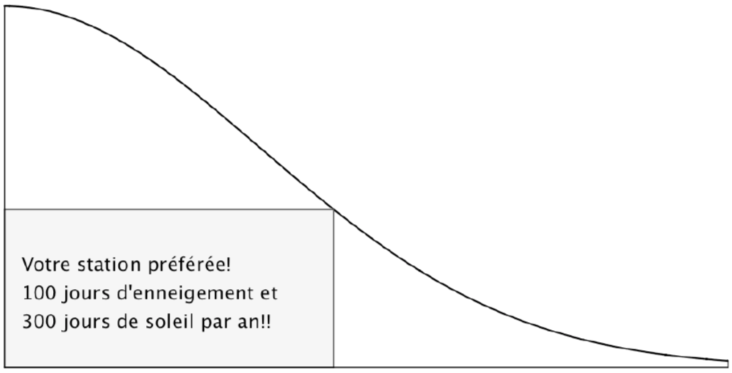
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.

En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.

Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.

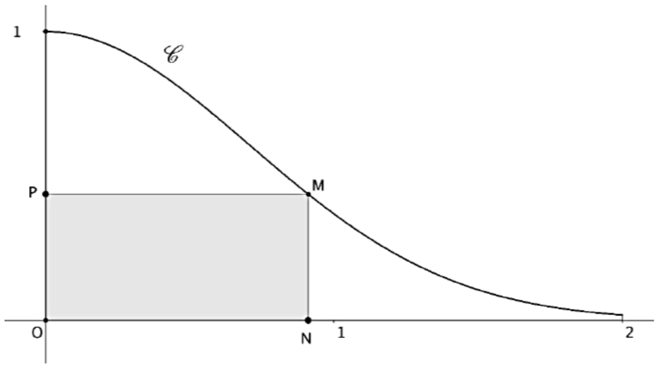


Le panneau, modélisé par le domaine D défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre.

Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,\right)$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 2], on note :

- M le point de la courbe C_f de coordonnées $(x\,;\ e^{-x^2})$,
- N le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,
- P le point de coordonnées $(0\,;\ e^{-x^2})$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0; 2], on a : $A(x) = x\ e^{-x^2}$.
2. Déterminer la position du point M sur la courbe C_f pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.
3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc.

Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.

CORRECTION

Partie A

1. a. $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx - \int_0^{n} e^{-x^2}\,dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx$

La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est positive sur R, et $n + 1 > n$ donc $\int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante.

b. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ donc $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ donc pour tout réel $x > 0$, on a : $-x^2 \leq -2x + 1$,

La fonction exponentielle est croissante sur R et pour tout réel $x > 0$, on a : $-x^2 \leq -2x + 1$, donc : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

$e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ donc $\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^n e^{-2x+1}\,dx$ soit $\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leq \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+1}\right]_0^n$ soit $u_n \leq \frac{e - e^{-2n+1}}{2} \leq \frac{e}{2}$

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \frac{e}{2}$.

c. La suite (u_n) est croissante, majorée par $\frac{e}{2}$ donc est convergente.

2. a. $u_2 = \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ donc u_2 = aire de D or aire de OABC $= 2 \times 1 = 2$ et $p = \frac{\text{aire de D}}{\text{aire de OABC}}$ donc aire de D $= 2p$

donc $u_2 = 2p$.

b. *i.* La condition de la ligne L8 concernant la position du point M(X ; Y) permet de tester si le point M(X ; Y) appartient à D

ii. la valeur F affichée par cet algorithme correspond à la fréquence des points appartenant au domaine D sur N tirages aléatoires.

iii. Lorsque N devient très grand, F tend vers p.

c. Si $N = 10^6$, alors C = 441138 donc $F = 441\,138 \times 10^{-6}$ donc $p \approx 0{,}441$ à 10^{-3} près

Une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près est $2p$ donc 0,88 à 10^{-2} près

Partie B

1. M est le point de la courbe C_f de coordonnées (x ; e^{-x^2}), donc MN = e^{-x^2} et ON = x donc pour tout nombre réel x de l'intervalle [0; 2], on a : A(x) = ON × MN = $x\ e^{-x^2}$.

2. $A'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		2
A'(x)		+	0	–	
A	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-0,5}$	↘	$2\,e^{-4}$

A est maximale si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; e^{-0,5}\right)$.

3. L'aire de la partie peinte en bleue est donc $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-0,5}$ *u. a.* soit environ 0,43 m^2

L'aire de la partie blanche est donc $u_2 - A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,88 - 0,43$ soit environ 0,45 m^2.