

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4, b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A', B' et C' d'affixes respectives

$$a' = j a, b' = j b \text{ et } c' = j c \text{ où } j \text{ est le nombre complexe } -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j .

En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c' .

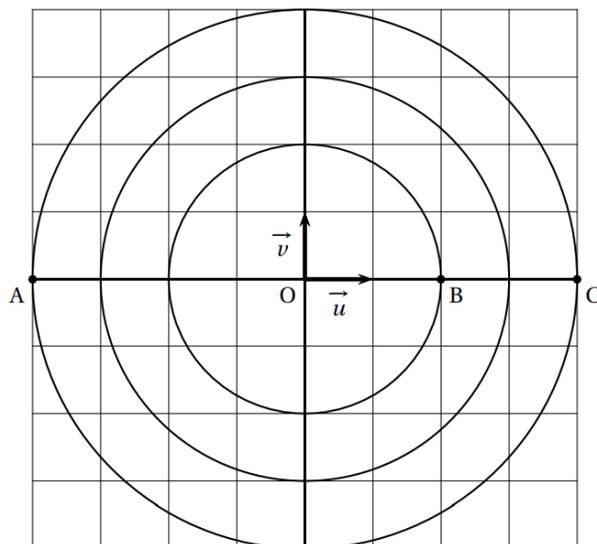
b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni ci-contre

Placer les points A', B' et C' sur ce graphique.

2. Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

3. On note M le milieu du segment $[A' C']$, N le milieu du segment $[C' C]$ et P le milieu du segment $[C' A]$.

Démontrer que le triangle MNP est isocèle.



CORRECTION

1. a. $j = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ donc $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$

Forme algébrique
$a' = j a = 2 - 2i\sqrt{3}$
$b' = j b = -1 + i\sqrt{3}$
$c' = j c = -2 + 2i\sqrt{3}$

$$a = 4 e^{i\pi} \text{ donc } a' = 4 e^{i\pi} \times e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

Forme exponentielle
$a' = 4 e^{i \frac{5\pi}{3}}$
$b' = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}}$
$c' = 4 e^{i \frac{2\pi}{3}}$

b. A' appartient au cercle de centre O de rayon 4 et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{5\pi}{3}$ soit

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{3}$$

B' appartient au cercle de centre O de rayon 2 et $(\vec{u}, \overrightarrow{OB'}) = \frac{2\pi}{3}$

C' appartient au cercle de centre O de rayon 2 et $(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = \frac{2\pi}{3}$

2. $b' = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}}$ et $c' = 4 e^{i \frac{2\pi}{3}}$ donc $\overrightarrow{OC'} = 2 \overrightarrow{OB'}$, les points O, B', C' sont alignés

$a' = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $c' = -2 + 2i\sqrt{3}$ donc $c' = -a'$ soit $\overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OA'}$, les points O, A', C' sont alignés donc les points A', B' et C' sont alignés.

3. L'affixe de M est $m = \frac{a' + c}{2} = 2 e^{i \frac{5\pi}{3}} + 2 = 3 - i\sqrt{3}$

L'affixe de N est $n = \frac{c' + c}{2} = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}} + 2 = 1 + i\sqrt{3}$

L'affixe de P est $p = \frac{c' + a}{2} = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}} - 1 = -3 + i\sqrt{3}$

$$PN^2 = |3 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}|^2 = 2^2 + 2^2 \times 3 = 16$$

$$NM^2 = |-3 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}|^2 = 4^2 = 16 \text{ donc } PN = NM, \text{ le triangle MNP est isocèle en N.}$$

