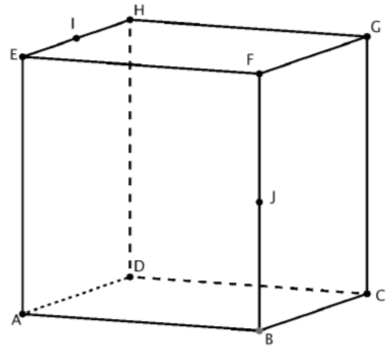
Métropole La Réunion septembre 2017

EXERCICE 4 **5 points** **Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. ***a.*** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

c. On note K le milieu du segment [HI]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{6}$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\, B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{5}{9}\right)$.

d. Calculer la longueur FF′. En déduire l'aire du triangle BGI.

CORRECTION

1. Les coordonnées des points I et J sont (0 ; 0,5 ; 1) et (1 ; 0 ; 0,5).

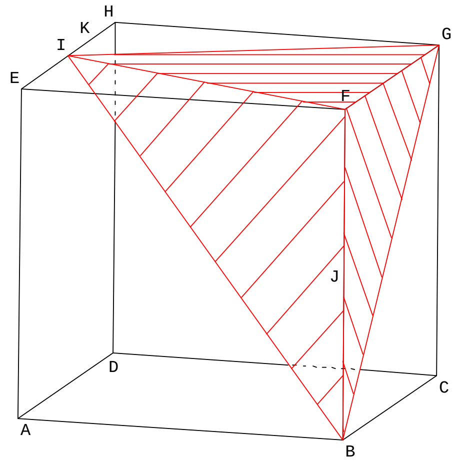
2. *a.* $\vec{n}.\overrightarrow{BG} = 0\times1 - 2\times1 + 2\times1 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{BI} = -1\times1 - 2\times0{,}5 + 2\times1 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) donc est un vecteur normal au plan (BGI).

b. Une équation cartésienne du plan (BGI) est de la forme $x - 2y + 2z + d = 0$

B ∈ (BGI) donc $1 + d = 0$ soit $d = -1$ donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $x - 2y + 2z - 1 = 0$

c. Les coordonnées du point K sont (0 ; 0,75 ; 1)

$x_K - 2y_K + 2z_K - 1 = -1{,}5 + 2 - 1 = -0{,}5$ donc le point K n'appartient pas au plan (BGI).



3. *a.* En utilisant le triangle FIG pour base, la hauteur issue de B est FB = 1,

L'aire de FIG est égale à 1 – Aire $_{EFI}$ – Aire $_{IHG}$ = 1 – 0,25 – 0,25 = 0,5

Le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1 = \frac{1}{6}$.

b. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI) donc une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI) est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′ donc $1 + t - 2(-2t) + 2(1 + 2t) - 1 = 0$ soit $9t + 2 = 0$ donc $t = \frac{-2}{9}$.

Le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{5}{9}\right)$.

d. $\overrightarrow{FF'} = \frac{-2}{9}\vec{n}$ donc FF' = $\frac{2}{9}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{2}{3}$

Le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$ Aire $_{BGI}$ donc Aire $_{BGI} = \frac{3}{4}$.