Nouvelle-Calédonie mars 2015

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Soit a un nombre réel strictement positif.

On note Δ_a la droite d'équation $y = a\,x$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.

Pour cela, on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par $f_a(x) = \mathrm{e}^x - a\,x$.

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Étude du cas particulier $a = 2$

La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = \mathrm{e}^x - 2\,x$.

a. Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.*

b. En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.

2. Étude du cas général où a **est un réel strictement positif**

a. Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.

c. Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.

d. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.

À la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées.

Les puces restantes sont livrées aux clients.

On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.

On note L l'évènement « La puce est livrée ».

On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».

Étant donné deux évènements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.

a. Donner la valeur $P_L(C)$.

b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?

c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a. Montrer que $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}98)}{1\,000}$.

b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer $P(20\,000 \leq X \leq 30\,000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication.

On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003.

On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées. On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15000$ et $p = 0{,}003$.

b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leq Y \leq 50)$.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0 ; 2 ; -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.

On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. a. Donner une représentation paramétrique de D_1.

b. Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).

c. Le point $A_2(-1 ; 4 ; 2)$ appartient-il à D_2 ?

2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

a. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 17 \\ -22 \\ 9 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}\,u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}\,v_n \end{cases}$.

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.

2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N donné.

a. On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
	Traitement : Tant que $K < N$
	Affecter $\sqrt{3}\ S - T$ à S
	Affecter $S + \sqrt{3}\ T$ à T
	Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche-t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + \mathrm{i}\, v_n$.
On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = a\, z_n$.
b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_n = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. Étude du cas particulier $a = 2$

a. f_2 est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_2'(x) = \mathrm{e}^x - 2$

$\mathrm{e}^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
f_2		↘	$2 - 2\ln 2$	↗	

b. f_2 admet un minimum en 0 or $2 - 2 \ln 2 \approx 0{,}614$ donc $f_2(0) > 0$ donc pour tout x réel $f_2(x) > 0$ donc l'équation $\mathrm{e}^x = 2x$ n'a pas de solution. Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.
On peut en plus conclure que puisque pour tout x réel $f_2(x) > 0$, $\mathrm{e}^x > 2x$ donc Γ est au-dessus de Δ_2.

2. Étude du cas général où a est un réel strictement positif

a. $f_a(x) = \mathrm{e}^x - a\,x = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $a > 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -a\,x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$

b. f_a est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$

$\mathrm{e}^x - a > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$ ($a > 0$)

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a	$+\infty$	↘	$a - a\ln a$	↗	$+\infty$

La fonction f_a est décroissante sur $]-\infty\,;\ln a\,]$, puis croissante sure $[\ln a\,;+\infty\,[$ donc admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$ égal à $f_a(\ln a)$ soit $a - a\ln a$.

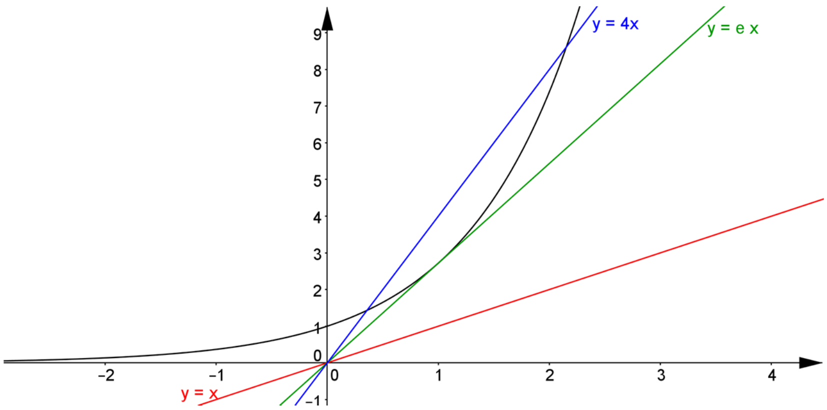
c. $a - a\ln a = a(1 - \ln a)$
$a > 0$ donc $a - a\ln a$ a le même signe que $1 - \ln a$
$1 - \ln a > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln a \Leftrightarrow 0 < a < \mathrm{e}$ donc :

a	0		e		$+\infty$
$a - a\ln a$		$+$	0	$-$	

d. **Si $0 < a < \mathrm{e}$:** f_a admet un minimum strictement positif donc f_a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc Γ et Δ_a n'ont pas de point d'intersection.

Si $a = \mathrm{e}$: f_{e} est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\mathrm{e}]$ et strictement croissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, f_{e} admet un minimum égal à $\mathrm{e} - \mathrm{e}\ln \mathrm{e}$ donc 0, donc f_{e} s'annule une seule fois en e, Γ et Δ_{e} ont un seul point d'intersection.

si $a > \mathrm{e}$: f_a est définie continue strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,a]$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$ et $f_a(a) < 0$ donc l'équation $f_a(x) = 0$ admet une seule α solution sur $]-\infty\,;\,a]$,
f_a est définie continue strictement croissante sur $]a\,;\,+\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$ et $f_a(a) < 0$ donc l'équation $f_a(x) = 0$ admet une seule solution β sur $]a\,;\,+\infty[$.
$\alpha < \mathrm{e} < \beta$ donc l'équation $f_a(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, Γ et Δ_a ont deux points d'intersection.

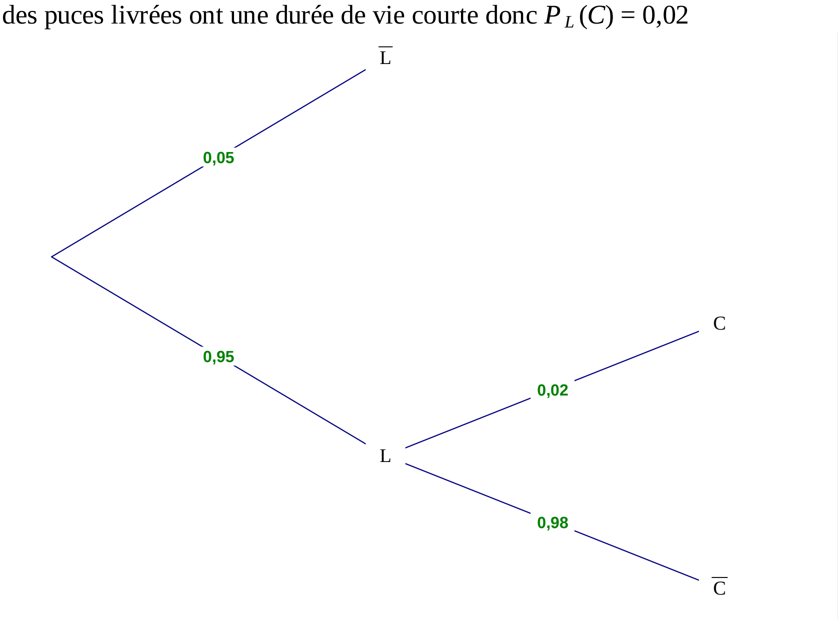


Exemple : les droites tracées correspondent à $a = 1$, $a = \mathrm{e}$, et $a = 4$.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. a. On observe que 2% des puces livrées ont une durée de vie courte donc $P_L(C) = 0{,}02$



b. $P(L \cap \overline{C}) = 0{,}95 \times 0{,}98 = 0{,}931$

c. $P(\overline{L} \cup (L \cap C)) = 0{,}05 + 0{,}95 \times 0{,}02 = 0{,}119$

2. a. $P(X \leq 10\,000) = 0{,}02 = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 1\,000}$ donc $1 - 0{,}02 = \mathrm{e}^{-\lambda \times 1\,000}$
$\mathrm{e}^{-\lambda \times 1\,000} = 0{,}98 \Leftrightarrow -1000\,\lambda = \ln 0{,}98 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}98)}{1\,000}$.

b. $P(X > 10\,000) = \mathrm{e}^{-10\,000\,\lambda} = \mathrm{e}^{10 \ln 0{,}98} \approx 0{,}817$

c. $P(20\,000 \leq X \leq 30\,000) = P(X \leq 30\,000) - P(X \leq 20\,000) = 1 - \mathrm{e}^{30 \ln 0{,}98} - (1 - \mathrm{e}^{20 \ln 0{,}98}) = \mathrm{e}^{20 \ln 0{,}98} - \mathrm{e}^{30 \ln 0{,}98}$
$P(20\,000 \leq X \leq 30\,000) \approx 0{,}122$
12,2 % des puces ont une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3. *a.* On a une succession de 15 000 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- **réussite :** la puce livrée a une durée de vie courte ($p = 0{,}003$)
- **échec :** la puce livrée a une durée de vie courte ($p = 0{,}003$)

donc la variable aléatoire Y égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon, suit une loi binomiale de paramètres $n = 15000$ et $p = 0{,}003$.

b. $E(Y) = 15000 \times 0{,}003 = 45$

Il y a en moyenne 45 puces à durée de vie courte sur les 15 000 extraites de la production.

c. $P(40 \leq Y \leq 50) = P(Y \leq 50) - P(Y \leq 39) \approx 0{,}589$.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

1. *a.* D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ donc est l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que $\overrightarrow{A_1M} = t\,\overrightarrow{u_1}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Une représentation paramétrique de D_1 est donc $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b. D_2 est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ donc un vecteur directeur de D_2 est $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c. Pour vérifier si A_2 appartient ou non à D_2, il suffit de chercher s'il existe k réel tel que $\begin{cases} -1 = 1 + k \\ 4 = -2k \\ 2 = 2 \end{cases}$ soit $k = -2$ donc A_2 appartient à D_2

2. $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont non colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, elles sont donc soit sécantes (et coplanaires) soit non sécantes et donc non coplanaires.

Cherchons l'éventuel point d'intersection de D_1 et D_2.

On cherche s'il existe t et k réels tels que $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 \end{cases}$

soit $\begin{cases} t = 1 + k \\ 2 + 2t = -2k \\ -1 + 3t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + k \\ 1 + t = -k \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 0 \\ 1 + 1 = -k \end{cases}$ ce qui est incohérent donc les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Les droites D_1 et Δ_1 contiennent le point A_1 donc sont sécantes. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires il suffit de montrer que deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux :

$\vec{v}\,.\,\vec{u} = -6 \times 1 - 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 0$ donc les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

4. *a.* Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P_1.

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 17 - 22 \times 2 + 9 \times 3 = 0$

$\vec{n}\,.\,\vec{u} = 17 \times (-6) - 22 \times (-3) + 9 \times 4 = -102 + 66 + 36 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan P_1. $\vec{n}$ est donc normal à ce plan.

b. Si P_1 et P_2 sont parallèles $\vec{n}$ vecteur normal au plan P_1 est aussi un vecteur normal au plan P_2 ; il est donc orthogonal à tout vecteur non nul du plan P_2 comme $\overrightarrow{u_2}$ et $\vec{v}$.

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 17 \times 1 - 22 \times (-2) + 9 \times 0 = 17 + 44$ donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{u_2} \neq 0$

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal à P_2 donc P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. A_1 appartient à P_1 et P_2 donc à Δ.

La droite Δ de vecteur directeur $\vec{v}$ passe par A_1, $\vec{v}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 0$ donc les droites Δ et D_1 sont perpendiculaires.

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0$ donc les droites Δ et D_2 sont perpendiculaires.

Il existe donc une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3}\, u_0 - v_0 = \sqrt{3} \\ v_1 = u_0 + \sqrt{3}\, v_0 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} u_2 = \sqrt{3}\, u_1 - v_1 = 2 \\ v_2 = u_1 + \sqrt{3}\, v_1 = 2\sqrt{3} \end{cases}$

2. *a.*

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
$\sqrt{3}\ S - T = 3 - \sqrt{3}$	$S + \sqrt{3}\, T = 3 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ $= 6 - \sqrt{3}$	2

b. L'algorithme précédent n'affiche pas les valeurs de u_N et v_N pour un entier $N = 2$.
Il faut introduire une nouvelle variable U, qui stockera u_n le temps de la boucle de l'algorithme

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
	U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
	Traitement : Tant que $K < N$
	Affecter S à U
	Affecter $\sqrt{3}\ U - T$ à S
	Affecter $U + \sqrt{3}\, T$ à T
	Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

3. *a.* $z_{n+1} = u_{n+1} + \mathrm{i}\, v_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n - v_n + \mathrm{i}\,(u_n + \sqrt{3}\, v_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = (\sqrt{3} + \mathrm{i})\, u_n + \mathrm{i}\,(\sqrt{3} + \mathrm{i})\, v_n$

$z_{n+1} = (\sqrt{3} + \mathrm{i})\,(u_n + \mathrm{i}\, v_n)$ donc $z_{n+1} = a\, z_n$ avec $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

b. $|\, a \,| = \sqrt{\sqrt{3}^{\,2} + 1^2} = 2$

$\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ avec $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ donc $a = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

c. $z_{n+1} = a\, z_n$ avec $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ donc (z_n) est une suite géométrique de raison a de premier terme $z_0 = u_0 + \mathrm{i}\, v_0 = 1$
donc $z_n = a^n\, z_0 = a^n$

$z_n = a^n = 2^n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) + 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$ or $z_n = u_n + \mathrm{i}\, v_n$ donc en égalant les parties réelles et les parties imaginaires : $\begin{cases} u_n = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$.