Amérique du Nord mai 2008

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (x O y).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; – 3) et (– 1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (x O y).

4. *a.* On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

4. *b.* M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

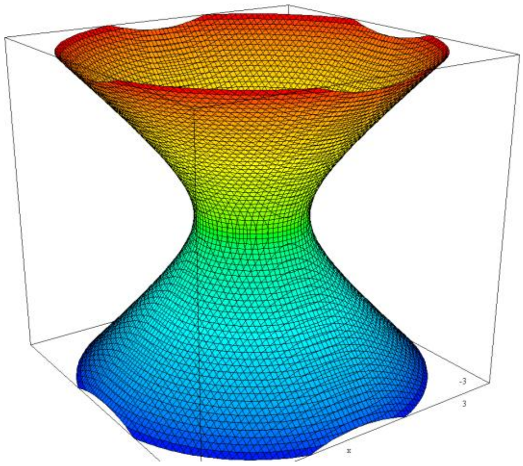
On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm (a ; b) = 440, c'est-à-dire tels que (a ; b) soit solution du système (1) : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}$.

Montrer que si (a ; b) est solution de (1) alors pgcd (a ; b) est égal à 1 ou 5.

Conclure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

CORRECTION



1. Dans la symétrie par rapport au plan (x O y), le point M(x ; y ; z) est transformé en le point M' de coordonnées (x' ; y' ; z') avec $x' = x$; $y' = y$ et $z' = -z$

donc $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1$ donc M' $\in$ (S)

La surface (S) est symétrique par rapport au plan (x O y).

2. *a.* Pour tout M de (D) il existe un réel k tel que

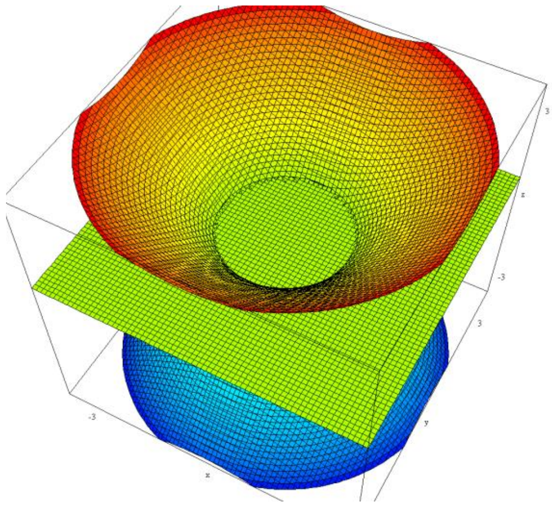
$$\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4k \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = -4k \end{cases}$$

une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B est donc $\begin{cases} x = 4k - 1 \\ y = 1 \\ z = -4k + 1 \end{cases}$.

b. Pour tout M de coordonnées (x ; y ; z) de (D) il existe un réel k tel que $\begin{cases} x = 4k - 1 \\ y = 1 \\ z = -4k + 1 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - z^2 = (4k - 1)^2 + 1 - (-4k + 1)^2$

or $(4k - 1)^2 = (-4k + 1)^2$ donc $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Tout point M de (D) appartient à (S)



3. Un plan P parallèle au plan (x O y) a pour équation $z = k$

Soit M un point du plan $z = k$, M a pour coordonnées (x ; y ; k), si M $\in$ (S) alors $x^2 + y^2 = 1 + k^2$ donc l'intersection de la surface avec un plan parallèle au plan (x O y) est un cercle de ce plan de centre $\Omega(0 ; 0 ; k)$ de rayon $\sqrt{1 + k^2}$

4. *a.* Si $z = 68$ alors $x^2 + y^2 = 69$ donc (C) est le cercle du plan d'équation $z = 68$, de center le point Ω (0 ; 0 ; 68) de rayon $\sqrt{69}$

4. *b.* Soit d = PGCD(a ; b) et m = PPCM(a ; b)

$d\,m = a\,b$ donc $a\,b = 440\,d$

d = PGCD(a ; b) donc il existe deux entiers naturels x et y premiers entre eux tels que $a = d\,x$ et $b = d\,y$

en remplaçant dans $a < b$ alors $x < y$ ($d > 0$)

en remplaçant dans $a^2 + b^2 = 4\,625$ alors $d^2(x^2 + y^2) = 4\,625$

$4\,625 = 5^3 \times 37$ donc d^2 divise $5^3 \times 37$ donc soit $d = 1$ soit $d = 5$

Si d = 1, on cherche a et b premiers entre eux tels que $a\,b = 440$ et $a^2 + b^2 = 4\,625$

soit à résoudre le système : $\begin{cases} a^2\,b^2 = 440^2 \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \end{cases}$

a^2 et b^2 sont solutions de $X^2 - 4\,625\,X + 440^2 = 0$

Soit $X_1 = \dfrac{4625 + \sqrt{824\,649}}{2}$ ou $X_2 = \dfrac{4625 - \sqrt{824\,649}}{2}$

Ces nombres n'étant pas entiers, il n'existe pas d'entiers naturels a et b tels que $\begin{cases} a^2\,b^2 = 440^2 \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \end{cases}$.

Si d = 5, $a\,b = 440\,d$ donc $d^2\,x\,y = 440\,d$ avec $d = 5$ donc $x\,y = 88$

on cherche a et b premiers entre eux tels que

$$x\,y = 88 \text{ et } x^2 + y^2 = 185$$

soit à résoudre le système : $\begin{cases} x^2\,y^2 = 88^2 \\ x^2 + y^2 = 185 \end{cases}$

x^2 et y^2 sont solutions de $X^2 - 185\,X + 88^2 = 0$

Soit $X_1 = 64$ ou $X_2 = 81$

donc x et y sont des entiers naturels tels que $x < y$ donc $x = 8$ et $y = 9$

$a = 5\,x$ et $b = 5\,y$ donc $a = 40$ et $b = 45$

Il existe un seul point M de (C) de coordonnées (a , b) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm (a ; b) = 440