Antilles Guyane juin 2016

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs : $7x - 3y = 1$. (E)

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x ; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \le x \le 10$ et $-5 \le y \le 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de − 5 à 10
                   (1) ..............
                        (2) ..............
                        Alors Afficher X et Y
                        Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. *a.* Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \le x \le 10$ et $-5 \le y \le 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la droite D d'équation $7x - 3y - 1 = 0$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n ; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2} x_n + 3 y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2} x_n + 8 y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{-13}{2} & 3 \\ \dfrac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = M X_n$.

b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que $P^{-1} M P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = P D^n P^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \dfrac{15}{2^n} & 6 - \dfrac{6}{2^n} \\ -35 + \dfrac{35}{2^n} & 15 - \dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite D.

CORRECTION

Partie A

1.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de − 5 à 10
                   (1) Pour Y variant de – 5 à 10
                        (2) Si que 7 x – 3 y = 1
                        Alors Afficher X et Y
                        Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. *a.* $7 - 3 \times 2 = 1$ donc $(1 ; 2)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b. $\begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 7\times 1 - 3\times 2 = 1 \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $7(x-1) - 3(y-2) = 0$ soit $7(x-1) = 3(y-2)$

$x - 1 \in \mathbb{Z}$ donc 7 divise $3(y-2)$, 7 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y - 2$

Il existe un entier relatif k tel que $y - 2 = 7k$ soit $y = 7k + 2$
En remplaçant dans $7(x-1) = 3(y-2)$ alors $x - 1 = 3k$ soit $x = 3k + 1$

Si $(x ; y)$ est solution de $7x - 3y = 1$ alors $x = 3k + 1$ et $y = 7k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : si $x = 3k + 1$ et $y = 7k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 3y = 21k + 7 - 21k - 6 = 1$ donc $(3k + 1 ; 7k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$ est solution de $7x - 3y = 1$

L'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(3k + 1 ; 7k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. L'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(3k + 1 ; 7k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$-5 \le x \le 10$ et $-5 \le y \le 10$ donc $-5 \le 3k + 1 \le 10$ et $-5 \le 7k + 2 \le 10$ soit $-6 \le 3k \le 9$ et $-7 \le 7k \le 8$

soit $-2 \le k \le 3$ et $-1 \le k \le \frac{8}{7}$. Les deux conditions sont équivalentes à $-1 \le k \le 1$

On obtient donc les couples $(-2 ; -5)$; $(1 ; 2)$; $(4 ; 9)$.

Partie B

1. *a.* Pour tout entier naturel n, $M X_n = \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$ donc $X_{n+1} = M X_n$.

b. Pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

2. *a.* $P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2{,}5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

b. Pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}$.

c. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $M^n = P^{-1} D^n P$.
Initialisation : M et D ne sont pas nulles donc $A^0 = D^0 = I_2$ donc $P^{-1} D^0 P = P^{-1} P = I_2 = A^0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $M\ n = P^{-1} D^n P$ alors $M\ n + 1 = P^{-1} D^{n+1} P$.
$M^{n+1} = M M^n = P^{-1} D P \times P^{-1} D^n P$ donc $M^{n+1} = P^{-1} D \times D^n P$ donc $M^{n+1} = P^{-1} D^{n+1} P$.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $M^n = P^{-1} D^n P$.

3. $X_n = M^n X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} + 2\left(6 - \frac{6}{2^n}\right) \\ -35 + \frac{35}{2^n} + 2\left(15 - \frac{14}{2^n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2^n} \\ -5 + \frac{7}{2^n} \end{pmatrix}$

$x_n = -2 + \frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \frac{7}{2^n}$

4. $7x_n - 3y_n = 7\left(-2 + \frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5 + \frac{7}{2^n}\right) = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} = 1$.

Pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite D.