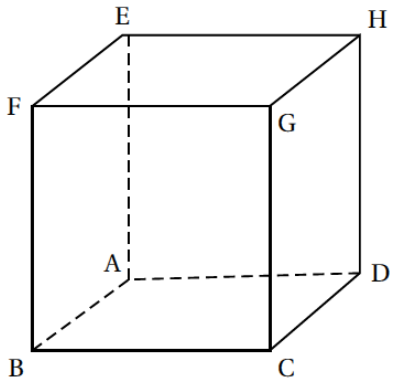
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points : $I\left(1\ ;\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(0\ ;\frac{2}{3};1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\ ;0\ ;1\right)$ et L (a ; 1 ; 0) avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

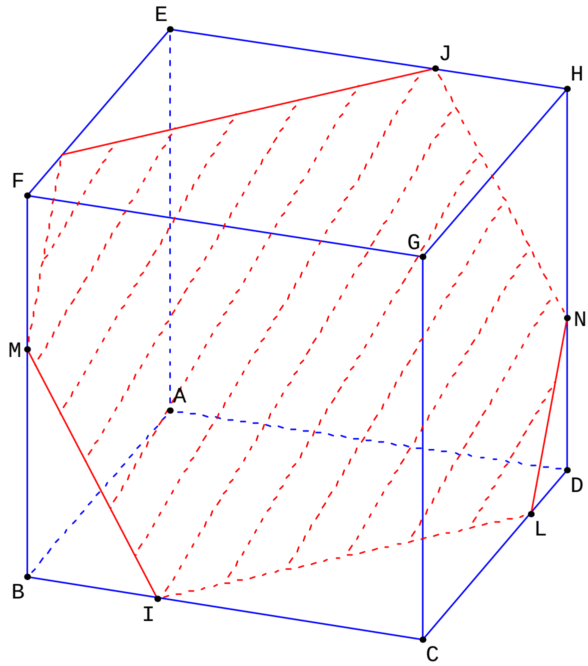
Partie B

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;1\ ;0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation :

$$8x + 9y + 5z - 11 = 0.$$

c. En déduire les coordonnées des points M et N.

CORRECTION

Partie A

1. La droite (IJ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$ de coordonnées $\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$, c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} = t\,\overrightarrow{IJ}$ ($t \in \mathbb{R}$)

donc a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = 0 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Le point de D de paramètre t' = 0, a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4};0\ ;1\right)$ donc K $\in$ D.

Le point de D de paramètre t' = 1, a pour coordonnées (a ; 1 ; 0) donc L $\in$ D .

K $\neq$ L donc la droite D est la droite (KL) donc la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

3. Cherchons le point d'intersection s'il existe des droites (IJ) et (KL).

Il faut donc chercher t et t' tels que $\begin{cases} x = 1 - t = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}t = t' \\ z = t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4t = 3 + t'(4a - 3) \\ 1 + t = 3t' \\ z = t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4t + t'(4a - 3) \\ 1 + t = 3t' \\ z = t = 1 - t' \end{cases}$

Les deux dernières lignes conduisent au système $\begin{cases} -t + 3t' = 1 \\ t + t' = 1 \end{cases}$ donc par addition terme à terme : $\begin{cases} 4t' = 2 \\ t + t' = 1 \end{cases}$ donc $t = t' = \dfrac{1}{2}$.

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si, lorsque $t = t' = \dfrac{1}{2}$, on a : $4t + t'(4a - 3) = 1 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{1}{2}(4a - 3) = 1$

$\Leftrightarrow 2 + 2a - \dfrac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow 2a = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

1. Le vecteur directeur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{3}; 1\right)$. $\overrightarrow{LJ}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{3}; 1\right)$ donc $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$ donc le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. *a.* $\vec{n}.\overrightarrow{IK} = 8 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 5 \times 1 = -2 - 3 + 5 = 0$

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IJ} = 8 \times (-1) + 9 \times \dfrac{1}{3} + 5 \times 1 = -8 + 3 + 5 = 0$

Les points I, J, K ne sont pas alignés donc n est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ non colinéaires du plan (IJK) donc le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK) donc le plan (IJK) a une équation de la forme :
$8x + 9y + 5z + d = 0$ où d est un réel.

I est un point du plan donc $8 \times 1 + 9 \times \dfrac{1}{3} + 5 \times 0 + d = 0$ soit $8 + 3 + d = 0$ donc $d = -11$

Le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.

c. M est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF).

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ donc la droite (BF) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées de M doivent vérifier $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc $8 \times 1 + 9 \times 0 + 5 \times t - 11 = 0$ donc $5t = 3$ donc $t = 0{,}6$.

Les coordonnées de M sont (1 ; 0 ; 0,6).

N est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ donc la droite (DH) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées de M doivent vérifier $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc $8 \times 0 + 9 \times 1 + 5 \times t - 11 = 0$ donc $5t = 2$ donc $t = 0{,}4$. Les coordonnées de N sont (0 ; 1 ; 0,4).