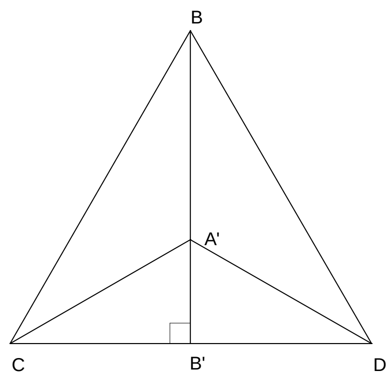
ABCD est un tétraèdre régulier de côté a.

1. a. A' est l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminer le réel m tel que le point G, milieu de [AA'], soit le barycentre de (A, m), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).
Placer ces différents points sur une figure.
b) Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de a.
2. Déterminer l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que $6\ MA^2 + 2\ MB^2 + 2\ MC^2 + 2\ MD^2 = 5\ a^2$.
3. a. Déterminer l'ensemble Π des points M de l'espace tels que $MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\ MA^2 = a^2$.
b. Vérifier que Π est le plan médiateur du segment [AA'].
4. Déterminer l'intersection C de Σ et Π et prouver que les milieux I, J, K des segments [AB], [AC], [AD] appartiennent à C
Placer C sur la figure.

CORRECTION

1. A' est l'isobarycentre de B, C, D donc le barycentre de {(B ; 1) (C ; 1) (D ; 1)}
G est le barycentre de {(A ; m) {(B ; 1) (C ; 1) (D ; 1)} donc de {(A ; m) (A' ; 3)}
G est le milieu de [AA'] si et seulement si G est l'isobarycentre de A, A' donc si et seulement si $m = 3$



1. b. A' est l'isobarycentre de B, C, D donc $GB = \dfrac{2}{3} BB'$ (B' étant le milieu de [CD])

Le triangle BCD est équilatéral de côté a donc $BB' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$ donc $GB = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} a = \dfrac{1}{\sqrt{3}} a$

donc $GB^2 = \dfrac{1}{3} a^2$

Le triangle BCD est équilatéral donc A' isobarycentre de B, C, D est aussi le centre du cercle circonscrit à ce triangle donc A'B = BC = A'D donc A' appartient au plan médiateur $\Pi_{[BD]}$ de [BD]

Le tétraèdre est ABCD est régulier donc AB = AD donc A appartient au plan médiateur $\Pi_{[BD]}$ de [BD] donc (AA') est une droite du plan médiateur $\Pi_{[BD]}$ de [BD] donc (AA') est orthogonale à (BD)

de même (AA') est une droite du plan médiateur $\Pi_{[BC]}$ de [BC] donc (AA') est orthogonale à (BC)
(AA') est orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (BC) du plan (BCD) donc à toute droite de ce plan en particulier à (BA')
Le triangle A'AB est donc rectangle en A' donc $A'B^2 + A'A^2 = AB^2$ soit $\dfrac{1}{3} a^2 + A'A^2 = a^2$

$A'A^2 = \dfrac{2}{3} a^2$; G est le milieu de [AA'] donc $GA = \dfrac{1}{2} GA'$ donc $GA^2 = GA'^2 = \dfrac{1}{6} a^2$
Le triangle A'AB est donc rectangle en A' ; G est le milieu de [AA'] donc le triangle A'GB est donc rectangle en A'
$A'B^2 + A'G^2 = GB^2$ soit $\dfrac{1}{3} a^2 + \dfrac{1}{6} a^2 = GB^2$

$GB^2 = \dfrac{1}{2} a^2$; G appartient au plan médiateur $\Pi_{[BD]}$ de [BD] donc GD = GB

de même G appartient plan médiateur $\Pi_{[BC]}$ de [BC] donc $GB^2 = GC^2 = GD^2 = \dfrac{1}{2} a^2$

2. $6\ MA^2 + 2\ MB^2 + 2\ MC^2 + 2\ MD^2 = 6\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 2\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + 2\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2$
$= 6\ MG^2 + 6\ GA^2 + 2\ MG^2 + 2\ GB^2 + 2\ MG^2 + 2\ GC^2 + 2\ MG^2 + 2\ GD^2 + \left(12\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 4\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 4\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + 4\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GD}\right)$

or $GB^2 = GC^2 = GD^2 = \dfrac{1}{2} a^2$ et $GA^2 = \dfrac{1}{6} a^2$ donc :
$6\ MA^2 + 2\ MB^2 + 2\ MC^2 + 2\ MD^2 = 12\ MG^2 + 6\ GA^2 + 6\ GB^2 + 4\,\overrightarrow{MG}.(3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$
$= 12\ MG^2 + a^2 + 3\ a^2 + 4\,\overrightarrow{MG}.(3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

or $3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ donc $6\ MA^2 + 2\ MB^2 + 2\ MC^2 + 2\ MD^2 = 12\ MG^2 + 4\ a^2$

donc $6\ MA^2 + 2\ MB^2 + 2\ MC^2 + 2\ MD^2 = 5\ a^2 \Leftrightarrow 12\ MG^2 + 4\ a^2 = 5\ a^2 \Leftrightarrow 12\ MG^2 = a^2 \Leftrightarrow MG = \dfrac{1}{\sqrt{12}} a = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} a$

Σ est la sphère de centre G de rayon $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} a$.

3. a. $MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\ MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 - 3\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$

$= MG^2 + GB^2 + MG^2 + GC^2 + MG^2 + GD^2 - 3\,MG^2 - 3\,AG^2 + 2\,(-3\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GD})$

or $GB^2 = GC^2 = GD^2 = \frac{1}{2}a^2$ et $GA^2 = \frac{1}{6}a^2$ donc :

$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\,MA^2 = 3\,GB^2 - 3\,AG^2 + 2\,\overrightarrow{MG}.(-3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\,MA^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 2\,\overrightarrow{MG}.(-3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\,MA^2 = a^2 + 2\,\overrightarrow{MG}.(-3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

A' est l'isobarycentre de BCD donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\,\overrightarrow{AA'}$

$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\,MA^2 = a^2 + 6\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AA'}$

donc $MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\,MA^2 = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AA'} = 0$

donc les points M cherchés décrivent le plan Π perpendiculaire en G à (AA').

3. *b*. G est le milieu de [AA'] et Π a pour vecteur normal $\overrightarrow{AA'}$ donc Π est le plan médiateur de [AA']

4. Σ est la sphère de centre G de rayon $\frac{1}{2\sqrt{3}}a$, Π est le plan médiateur de [AA'] donc passe par le centre de la sphère donc l'intersection C de Π et de Σ est le cercle de centre G de même rayon que la sphère soit $\frac{1}{2\sqrt{3}}a$.

I est le milieu de [AB] donc $AI = BI = \frac{1}{2}a$

[CI] est une hauteur du triangle équilatéral ABC donc $CI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

de même $DI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$6\,IA^2 + 2\,IB^2 + 2\,IC^2 + 2\,ID^2 = 8\,IA^2 + 4\,IC^2 = 8 \times \frac{1}{4}a^2 + 4 \times \frac{3}{4}a^2 = 5\,a^2$ donc $I \in \Sigma$

$-3\,IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = -2\,IA^2 + 2\,IC^2 = -2 \times \frac{1}{4}a^2 + 2 \times \frac{3}{4}a^2 = a^2$ donc $I \in \Pi$

$I \in \Sigma$ et $I \in \Pi$ donc $I \in C$
de même pour J et K.