Amérique du Nord juin 2005

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\,\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2{,}08+1{,}98\,\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle **(c)** : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. à tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\,\mathrm{i}}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite **(c)** : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z′ est un réel est :

(a) : un cercle **(b)** : une droite **(c)** : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ **(b)** : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

(c) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ **(d)** : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

5. L'équation $z^2 - 3\sqrt{3}\;z + 9 = 0$ admet deux solutions dont la forme exponentielle est :

a. $z_1 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

b. $z_1 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}}$ et $z_2 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

c. $z_1 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}}$ et $z_2 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

d. $z_1 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$

CORRECTION

1. A $(-2+3\,\mathrm{i})$, B$(-3-\mathrm{i})$ et C $(2{,}08+1{,}98\,\mathrm{i})$ donc $AB^2 = |-2+3\,\mathrm{i}+3+\mathrm{i}|^2 = |1+4\,\mathrm{i}|^2 = 17$

$AC^2 = |-2+3\,\mathrm{i}-2{,}08-1{,}98\,\mathrm{i}|^2 = |-4{,}08+1{,}02\,\mathrm{i}|^2$

$AC^2 = 17{,}6868$

$BC^2 = |3+\mathrm{i}+2{,}08+1{,}98\,\mathrm{i}|^2 = |5{,}08+2{,}98\,\mathrm{i}|^2 = 34{,}6868$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc *b* vrai

2. $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z-4\,\mathrm{i}| = |z+2| \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de IJ avec I (4 i) et J d'affixe (– 2) donc *b* vrai

3. z' réel $\Leftrightarrow z'$ nul ou si $z' \neq 0$, $\arg z' = 0$ ou π à 2π près

$\Leftrightarrow$ M = I ou $\left(\overrightarrow{MJ}\,;\overrightarrow{MI}\right) = 0$ ou π à 2π près $\Leftrightarrow$ M = I ou M , I, J alignés avec M ≠ I et M ≠ J $\Leftrightarrow$ M décrit (IJ) privée de J donc *c* vrai

4. L'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ d'angle θ est $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z-\omega)$

donc $z' - \mathrm{i} = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-\mathrm{i}) = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ donc $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ***d.*** vrai

5. Les solutions d'une équation à coefficients constants sont des complexes conjugués donc leurs modules sont identiques et les arguments sont opposés à 2π près donc *d* vrai.

Autre solution :

$\Delta = 27 - 36 = -9 = (3\,\mathrm{i})^2$ donc l'équation $z^2 - 3\sqrt{3}\;z + 9 = 0$ admet deux solutions $z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}+3\,\mathrm{i}}{2} = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$ et

$z_2 = \dfrac{3\sqrt{3}-3\,\mathrm{i}}{2} = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$ dont la forme exponentielle est : $z_1 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 3\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$