Reproduction des chamois dans un parc

La population de chamois dans un parc se partage en deux classes d'âge, les « jeunes » et les « vieux ». On note u_n le nombre d'animaux « jeunes » l'année de rang *n*, et y_n le nombre d'animaux « vieux » l'année de rang *n*. On suppose que :

- 50 % des animaux « jeunes » passent dans la classe des « vieux » d'une année à l'autre
- le taux de mortalité est de 25 % dans la classe des « jeunes » et de 75 % dans la classe des « vieux » ;
- le taux de natalité est de 200 % pour la classe des « vieux », les « jeunes » n'étant pas encore en mesure de se reproduire.

Enfin, on introduit chaque année dans le parc 20 jeunes chamois supplémentaires.

Au début de l'étude, c'est-à-dire l'année de rang 0, il y a 400 jeunes chamois et 100 vieux chamois.

1. *a.* Vérifier que $u_1 = 320$ et $v_1 = 225$.

b. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

2. On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne B telles que : $U_{n+1} = A \times U_n + B$

3. *a.* Soit I_2 la matrice unité d'ordre 2. Montrer que la matrice $E = I_2 - A$ est inversible et déterminer son inverse.

b. Montrer qu'il existe une unique matrice C telle que C = A C + B, et déterminer C.

4. Soit la matrice V_n telle que, pour tout entier naturel *n* : $V_n = U_n - C$

Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.

5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis $D = P^{-1} A P$.

6. En déduire A^n en fonction de P^{-1}, D^n et P. Calculer la matrice A^n en fonction de *n*.

7. *a.* Déterminer alors les coefficients de la matrice V_n en fonction de *n*.

b. En déduire la matrice U_n en fonction de *n*.

c. Exprimer u_n et v_n en fonction de *n*.

8. *a.* Quelle est la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Quelle est la limite de la suite (w_n), où $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ °? Interpréter ce résultat.

CORRECTION

1. *a.* Au début de l'étude, c'est-à-dire l'année de rang 0, il y a 400 jeunes chamois et 100 vieux chamois.

50 % des animaux « jeunes » passent dans la classe des « vieux » d'une année à l'autre donc 200 chamois deviennent vieux

Le taux de mortalité est de 25 % dans la classe des « jeunes » donc $400 \times 0,25 = 100$ jeunes chamois meurent

Il reste donc $400 - (200 + 100) = 100$ jeunes chamois.

Le taux de mortalité est de 75 % dans la classe des « vieux » donc $100 \times 0,75 = 75$ vieux chamois meurent

Il reste donc $100 - 75 = 25$ vieux chamois

Le taux de natalité est de 200 % pour la classe des « vieux », donc les 100 chamois initiaux donnent $2 \times 100 = 200$ jeunes chamois

On introduit chaque année dans le parc 20 jeunes chamois supplémentaires.

$u_1 = 400 \times 0,25 + 2 \times 100 + 20 = 320$ et $v_1 = 400 \times 0,5 + 0,25 \times 100 = 225$.

b. D'une façon générale : en partant d'une population de u_n jeunes chamois et de v_n vieux chamois, on a au bout d'un an :

50 % des animaux « jeunes » passent dans la classe des « vieux » d'une année à l'autre donc $0,5\, u_n$ chamois deviennent vieux

Le taux de mortalité est de 25 % dans la classe des « jeunes » donc $0,25\, u_n$ jeunes chamois meurent

Il reste donc $0,25\, u_n$ jeunes chamois.

Le taux de mortalité est de 75 % dans la classe des « vieux » donc $0,75\, v_n$ vieux chamois meurent

Il reste donc $0,25\, v_n$ vieux chamois

Le taux de natalité est de 200 % pour la classe des « vieux », donc les v_n chamois initiaux donnent $2 \times v_n$ jeunes chamois

On introduit chaque année dans le parc 20 jeunes chamois supplémentaires.

	jeunes	vieux	décédés
jeunes u_n	$0,25\, u_n + 20$	$0,5\, u_n$	$0,25\, u_n$
vieux v_n	$2 \times v_n$	$0,25\, v_n$	$0,75\, v_n$

$u_{n+1} = 0,25\, u_n + 2 \times v_n + 20$ et $v_{n+1} = 0,5\, u_n + 0,25\, v_n$

2. $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = a\, u_n + b\, v_n + e \\ v_{n+1} = c\, u_n + d\, v_n + f \end{cases}$

or $u_{n+1} = 0,25\, u_n + 2 \times v_n + 20$ et $v_{n+1} = 0,5\, u_n + 0,25\, v_n$

donc $a = 0,25$; $b = 2$ $e = 20$ et $c = 0,5$; $d = 0,25$ et $f = 0$ donc $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. *a.* E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & -2 \\ -0,5 & 0,75 \end{pmatrix}$

$0,75 \times 0,75 - (-0,5) \times (-2) = 0,75^2 - 1 \neq 0$ donc E est inversible.

$$\begin{pmatrix} 0,75 & -2 \\ -0,5 & 0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,75\,a - 2\,c & 0,75\,b - 2\,d \\ -0,5\,a + 0,75\,c & -0,5\,b + 0,75\,d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a - 2c = 1 \\ \frac{3}{4}b - 2d = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}c = 0 \\ -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a - 2c = 1 \\ d = \frac{3}{8}b \\ a = \frac{3}{2}c \\ -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}c - 2c = 1 \\ d = \frac{3}{8}b \\ a = \frac{3}{2}c \\ -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4} \times \frac{3}{8}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{8}c = 1 \\ d = \frac{3}{8}b \\ a = \frac{3}{2}c \\ -\frac{7}{32}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{8}{7} \\ d = -\frac{3}{8} \times \frac{32}{7} = -\frac{12}{7} \\ a = -\frac{3}{2} \times \frac{8}{7} = -\frac{12}{7} \\ b = -\frac{32}{7} \end{cases}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} & -\frac{32}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

b. $C = A\,C + B \Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow (I - A)\,C = B \Leftrightarrow E\,C = B \Leftrightarrow C = E^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}$.

4. $V_{n+1} = U_{n+1} - C = A\,U_n + B - C = A\,U_n + B - (A\,C + B)$

$V_{n+1} = A\,U_n - A\,C = A\,(U_n - C) = A\,V_n$

Autre solution plus rapide : $\begin{cases} U_{n+1} = A\,U_n + B \\ C = A\,C + B \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $U_{n+1} - C = A\,U_n - A\,C$

soit $U_{n+1} - C = A\,(U_n - C)$ donc $V_{n+1} = A\,V_n$

5. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = D$

6. $P^{-1}\,A\,P = D$ donc $P\,P^{-1}\,A\,P\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1}$ or $P\,P^{-1} = P^{-1}\,P = I$ donc $A = P\,D\,P^{-1}$

Montrons par récurrence que $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$

Montrons qu'elle est héréditaire c'est-à-dire que pour tout entier n non nul, si $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ alors $A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$.

$A^{n+1} = A^n\,A$ or par hypothèse de récurrence $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ et d'autre part $A = P\,D\,P^{-1}$ donc en remplaçant :

$A^{n+1} = P\,D^n\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1}$ donc $A^{n+1} = P\,D^n\,D\,P^{-1}$ soit $A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,D\,P^{-1}$

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} 1,25^n & 0 \\ 0 & (-0,75)^n \end{pmatrix} \text{ donc } P\,D^n = \begin{pmatrix} 2 \times 1,25^n & 2 \times (-0,75)^n \\ 1,25^n & -(-0,75)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 1,25^n & 2 \times (-0,75)^n \\ 1,25^n & -(-0,75)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,5 \times 1,25^n + 0,5 \times (-0,75)^n & 1,25^n - (-0,75)^n \\ 0,25 \times 1,25^n - 0,25 \times (-0,75)^n & 0,5 \times 1,25^n + 0,5\,(-0,75)^n \end{pmatrix}$$

$$V_n = A^n\,V_0 \text{ et } V_0 = \begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{1560}{7} \end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 0,5 \times 1,25^n + 0,5 \times (-0,75)^n & 1,25^n - (-0,75)^n \\ 0,25 \times 1,25^n - 0,25 \times (-0,75)^n & 0,5 \times 1,25^n + 0,5\,(-0,75)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{1560}{7} \end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{3080}{7} \times 1,25^n - \frac{40}{7}(-0,75)^n \\ \frac{1540}{7} \times 1,25^n + \frac{20}{7}(-0,75)^n \end{pmatrix}$$

$U_n = V_n + C$ donc $U_n = \begin{pmatrix} \frac{3080}{7} \times 1,25^n - \frac{40}{7}(-0,75)^n - \frac{240}{7} \\ \frac{1540}{7} \times 1,25^n + \frac{20}{7}(-0,75)^n - \frac{160}{7} \end{pmatrix}$.

$u_n = \frac{3080}{7} \times 1,25^n - \frac{40}{7}(-0,75)^n - \frac{240}{7}$

et $v_n = \frac{1540}{7} \times 1,25^n + \frac{20}{7}(-0,75)^n - \frac{160}{7}$

$-1 < -0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,75)^n = 0$

$1,25 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,25^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{3080}{7} \times 1,25^n - \frac{40}{7} \times \left(-\ 0,75\right)^n - \frac{240}{7}}{\frac{1540}{7} \times 1,25^n + \frac{20}{7} \times \left(-\ 0,75\right)^n - \frac{160}{7}} = \frac{3080 \times 1,25^n - 40 \times \left(-\ 0,75\right)^n - 240}{1540 \times 1,25^n + 20 \times \left(-\ 0,75\right)^n - 160}$$

Le numérateur et le dénominateur ont pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc on a une forme indéterminée

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1,25^n \left(3080 - 40 \times \left(-\frac{0,75}{1,25}\right)^n - \frac{240}{1,25^n}\right)}{1,25^n \left(1540 + 20 \times \left(-\frac{0,75}{1,25}\right)^n - \frac{160}{1,25^n}\right)} = \frac{\left(3080 - 40 \times \left(-\frac{0,75}{1,25}\right)^n - \frac{240}{1,25^n}\right)}{\left(1540 + 20 \times \left(-\frac{0,75}{1,25}\right)^n - \frac{160}{1,25^n}\right)}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{3080}{1540} = 2$

A long terme il y aura deux fois plus de jeunes que de vieux.