ANTILLES–GUYANE JUIN 2007

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de R tels que $a \leq b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I , $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.

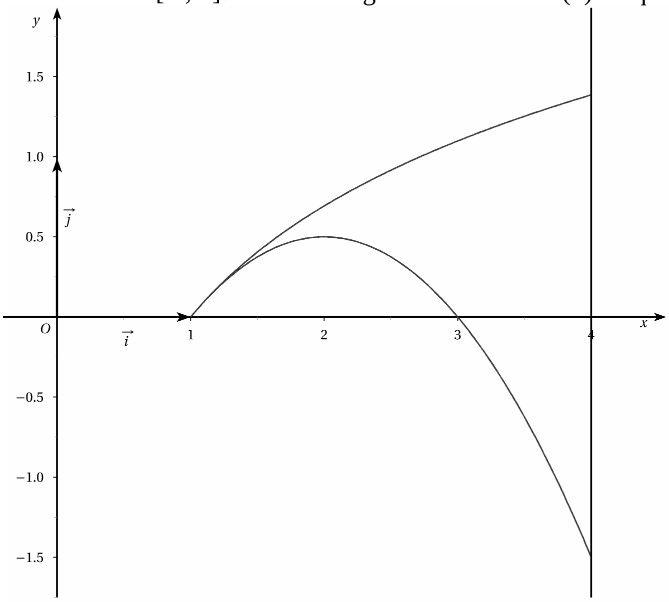
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$, on a : $\frac{1}{t} \geq 2-t$.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leq \ln x$

Partie B

Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$.

Sur le graphique ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4]. On a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.



1. *a*. Démontrer que $\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

***b*.** Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4].

En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

CORRECTION

Partie A

1. $\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t = \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^x = 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

2. $\frac{1}{t} - (2-t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t} = \frac{(t-1)^2}{t}$

donc pour tout $t > 0$, $\frac{1}{t} - (2-t) \geq 0$

donc pour tout t de $[1 ; +\infty[$, $\frac{1}{t} \geq 2 - t$.

3. pour tout t de $[1 ; +\infty[$, $\frac{1}{t} \geq 2 - t$.

$\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln x$

Partie B.

1. $\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^4$

$\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$

$\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 0$

La fonction h est la parabole qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 3

$\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 0$

h est positive sur $[1 ; 3]$ donc l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe de h, les droites $x = 1$, $x = 3$ est égale à $\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x$.

h est négative sur $[3 ; 4]$ donc l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe de h, les droites $x = 3$, $x = 4$ est égale à $\int_3^4 -h(x)\,\mathrm{d}x$.

$\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 0$

donc $\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^4 -h(x)\,\mathrm{d}x$

les aires des deux domaines sont égales.

$\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = [x \ln x]_1^4 - \int_1^4 x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = [x \ln x]_1^4 - \int_1^4 1\,\mathrm{d}x = 4\ln 4 - \ln 1 - (4-1)$

donc $\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = 4\ln 4 - 3$

$\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^3 = \frac{2}{3} = \int_3^4 -h(x)\,\mathrm{d}x$

donc l'aire demandée est égale à

$\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 -h(x)\,\mathrm{d}x = 4\ln 4 - 3$