Métropole juin 2008

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.

Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1, -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2 ; 3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i.$$

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. À partir de quel entier n le point B_n, appartient-t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

CORRECTION

1. Chercher les points de (d) dont les coordonnées sont entières revient à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x + 3y = 1$.

Une solution de l'équation $4x + 3y = 1$ est le couple $(1 ; -1)$: $4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1$
Par différence membre à membre $4(x - 1) + 3(y + 1) = 0$
soit $4(x - 1) = -3(y + 1)$, donc 3 divise $3(x - 1)$
or 4 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x - 1$ donc il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 3k$
En remplaçant dans $4(x - 1) = -3(y + 1)$, on obtient $4 \times 3k = -3 \times (y + 1)$ donc $y + 1 = -4k$
Vérification : si $x = 3k + 1$ et $y = -4k - 1$ alors $4(3k + 1) + 3(-4k - 1) = 1$ donc l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1, -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Si s est une similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2 ; 3)$ alors le rapport de la similitude est $k = \frac{AM_{-1}}{AB}$ et l'angle de la similitude est $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM_{-1}})$

$$\left(\frac{z_{M_{-1}} - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{-3 + 4i}{6 + \frac{9}{2}i} = \frac{2(-3 + 4i)}{12 + 9i} = \frac{2(-3 + 4i)}{3(4 + 3i)} = \frac{2}{3}i$$

donc $\frac{AM_{-1}}{AB} = \left|\frac{2}{3}i\right| = \frac{2}{3}$ donc s est une similitude directe de rapport $\frac{2}{3}$

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM_{-1}}) = \arg\left(\frac{z_{M_{-1}} - z_A}{z_B - z_A}\right)$ soit $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM_{-1}}) = \arg\left(\frac{2}{3}i\right)$ donc s est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

3. l'image de A par s, est le point d'affixe $z' = \frac{2}{3}i(1 - i) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i + \frac{2}{3}i = 1 - i$ donc $s(A) = A$

L'écriture complexe de s est de la forme $z' = a\,e + b$ avec $a \neq 0$ donc s est une similitude directe de centre A de rapport $k = \left|\frac{2}{3}i\right| = \frac{2}{3}$

et d'angle $\arg\left(\frac{2}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$ à 2π près.

4. *a*. s est une similitude directe de centre A de rapport $k = \frac{2}{3}$, $s(B_n) = B_{n+1}$ donc $AB_{n+1} = \frac{2}{3}AB_n$

La suite (AB_n) est une suite géométrique de premier terme $AB_0 = AB = \left|6 + \frac{9}{2}i\right| = 7{,}5$ et de raison $\frac{2}{3}$ donc $AB_n = 7{,}5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

4. *b*. Le point B_n, appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} si et seulement si $AB_n \leq 10^{-2}$

soit si et seulement si $7{,}5\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

$7{,}5\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{2}{15} \times 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{15}{2} \times 10^{2} \Leftrightarrow n \ln 1{,}5 \geq \ln 750 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 750}{\ln 7{,}5}$ or $16 < \frac{\ln 750}{\ln 7{,}5} < 17$ donc le point B_n, appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} si et seulement si $n \geq 17$

4. *c*. $B_n = s^{n-1}(B_1)$ où s^{n-1} désigne la composée de $n - 1$ fois la similitude s

s est une similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ à 2π près donc s^{n-1} est une similitude directe de centre A $\frac{2}{3}$ et d'angle $(n-1)\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

donc $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}) = (n-1)\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

A, B_1, B_n sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}) = k\pi$ avec $k \in$ Z soit si et seulement si $(n-1)\frac{\pi}{2} = k\pi$ à 2π près

soit $n - 1 = 2k + 4p$ avec k et p dans Z soit $n = 2k + 4p + 1$ ou encore n impair

A, B_1 et B_n sont alignés si et seulement si n est impair