

حساب التكامل 1

تمرين-1-

أحسب التكاملات التالية :

$$K = \int_{-2}^{-1} \sqrt{x+2} dx ; \quad J = \int_{-1}^1 e^{2x+2} dx ; \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx$$

تمرين-2-

(a) أحسب $\int_1^3 \frac{2+x}{(1+x)^2} dx$

(b) بين أن لكل $x \in \mathbb{R}$ من : $\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$

(c) أحسب $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$

(d) باستعمال المتكاملة بالأجزاء ، أحسب : $\int_0^{\ln 2} e^{-x} \ln(1+e^{-x}) dx$

تمرين-3-

(a) أحسب $I = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$ حيث

(b) أوجد دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{x}{(x^2+1)^2}$

(c) باستعمال المتكاملة بالأجزاء ، أحسب : $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

(لاحظ أن) $\left(\frac{1}{x(x^2+1)} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

تمرين-4-

أحسب التكاملات التالية :

$$I_3 = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1} dx ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx ; \quad I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

$$I_6 = \int_{\ln 2}^1 \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx ; \quad I_5 = \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx ; \quad I_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx ; \quad I_8 = \int_1^e \ln^2 x dx ; \quad I_7 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$$

$$I_{12} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx ; \quad I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; \quad I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$I_{15} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-3x+2} ; \quad I_{14} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx ; \quad I_{13} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+5} dx$$

$$I_{18} = \int_0^1 \frac{dx}{2x^2-2\sqrt{2}x+1} ; \quad I_{17} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+4} ; \quad I_{16} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-2}$$

حساب التكامل (2)

تذكير :

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \quad (1)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \quad (2)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \quad (3)$$

تمرين -1

أحسب التكاملات التالية :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx \quad (2)$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (1)$$

$$I_4 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x + 6} dx \quad (4)$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx \quad (3)$$

$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx \quad (6)$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \quad (5)$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{\sin x} dx \quad (8)$$

$$I_7 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin 5x dx \quad (10)$$

$$I_9 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos 3x dx \quad (9)$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx \quad (12)$$

$$I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \cos x) \sin x dx \quad (11)$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2} dx \quad (14)$$

$$I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \quad (13)$$

$$I_{16} = \int_0^1 \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \quad (16)$$

$$I_{15} = \int_1^{e^2} \frac{x+1}{x} \log x dx \quad (15)$$

$$I_{18} = \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx \quad (18)$$

$$I_{17} = \int_{-1}^1 (e^{2x} + xe^{x^2-1}) dx \quad (17)$$

$$I_{20} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad (20)$$

$$I_{19} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (19)$$

$$I_{22} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x} dx \quad (22)$$

$$I_{21} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2}} \quad (21)$$

$$I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \quad (24)$$

$$I_{23} = \int_1^3 (x - |x-2|) dx \quad (23)$$

$$I_{26} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx \quad (26)$$

$$I_{25} = \int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x dx \quad (25)$$

$$I_{28} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 4} \quad (28)$$

$$I_{27} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx \quad (27)$$

$$I_{30} = \int_1^e \frac{dx}{x^2 + x} \quad (30)$$

$$I_{29} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2} \quad (29)$$

تمرين-2-

لتكن $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

(a) أحسب I_0 و I_1

(b) حدد العلاقة بين I_n و I_{n-2}

(c) أحسب I_{2m} بدلالة m

و I_{2m+1} بدلالة m

تمرين-3-

حل في \mathbb{R} المعادلتين :

$$\int_0^x (3t^2 + 4t - 5) dt = x^3 - 2 \quad (1)$$

$$\int_0^x \sin^5 t dt = -\cos x \quad (2)$$

تمرين-4-

$$(1) \text{ بين أن : } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

$$(2) \text{ بين أن : } \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$(3) \text{ نعتبر التكاملين : } J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 4x dx \quad \text{و} \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 4x dx$$

-a أحسب $I + J$ و $I - J$

-b استنتج I و J .

تمرين-5-

لتكن f و g و h دوال معرفة بما يلي :

$$f(x) = \log \left(x + \sqrt{x^2 + k^2} \right)$$

$$g(x) = \log \left(x + \sqrt{x^2 - k^2} \right)$$

$$k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{حيث} \quad h(x) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x+k}{x-k} \right|$$

(1) حدد D_h و D_g ثم D_f

(2) أحسب الدالة المشتقة لكل من f و g و h .

(3) استنتاج دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

$$x \rightarrow \frac{1}{x^2 - k^2} \quad ; \quad x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 - k^2}} \quad ; \quad x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}}$$

(4) أحسب التكاملات التالية :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad \text{و} \quad \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{4x^2 - 3x - 1} \quad \text{و} \quad \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

تمرين-7-

ليكن (ℓ_f) المنحني الممثل للدالة f في مم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$. حدد مساحة الحيز (Δ) المحصور بين (ℓ_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمان $(x=a)$ و $(x=b)$ في الحالات التالية :

$$a=1 \quad \text{و} \quad b=\sqrt{e} \quad , \quad f(x)=\ln x^2 \quad (1)$$

$$a=1 \quad \text{و} \quad b=4 \quad , \quad f(x)=(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$a=-1 \quad \text{و} \quad b=1 \quad , \quad f(x)=|x|e^x \quad (3)$$

تمرين-8-

أحسب حجم المجسم المولى بالدوران حول محور الأفاصيل للشكل المحدد بمحور الأفاصيل والشلجم $(a > 0)$ ، $(y = ax - x^2)$

تمرين-9-

أحسب حجم المجسم المولى بالدوران حول محور الأفاصيل للشكل المحصور بين $(y = \sqrt{x})$ و $(y = x^2)$