On cherche des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation suivante : (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$

1\. *a.* Donner les reste possible de x modulo 9 et ceux de x^2.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles de a modulo 9 sont 1 et 8.

2\. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors a est supérieur ou égal à 501.

b. Déterminer le plus petit entier a supérieur ou égal à 501 vérifiant $a \equiv 1$ modulo 9.

3\. Ecrire un algorithme donnant la plus petite solution vérifiant $a \equiv 1$ modulo 9

Déterminer cette solution à l'aide de la calculatrice. En déduire une factorisation de 250 507

CORRECTION

1\. *a.* Le reste r de la division par 9 d'un entier naturel x est un entier compris entre 0 et 8 (bornes incluses) donc :

x congru modulo 9 à	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2 congru modulo 9 à	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Les restes possible de x^2 modulo 9 sont 0 ; 1 ; 4 ou 7.

b. Les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont les restes de b^2 modulo 9 donc sont 0 ; 1 ; 4 ou 7.

$250\,507 \equiv 2 + 5 + 0 + 5 + 0 + 7$ modulo 9 donc $250\,507 \equiv 1$ modulo 9

$a^2 - 250\,507 \equiv a^2 - 1$ modulo 9

$a^2 - 1$ congru modulo 9 à	0	1	4	7
a^2 congru modulo 9 à	1	2	5	8

c. a^2 est congru à 1 ; 2 ; 5 ou 8 or d'après la question 1. *a.*, d'après la question 1. *a.* :

a congru modulo 9 à	$\cancel{0}$	1	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	$\cancel{7}$	8
a^2 congru modulo 9 à	$\cancel{0}$	1	$\cancel{4}$	$\cancel{0}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{0}$	$\cancel{4}$	1

a^2 est congru modulo 9 à 0 ; 1 ; 4 ou 7 donc la seule possibilité est $a^2 \equiv 1$ modulo 9, donc les restes possibles de a modulo 9 sont 1 et 8.

2\. si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a^2 = b^2 + 250\,507$ donc $a^2 \geq 250\,507$, $a \geq 0$ donc $a \geq \sqrt{250\,507}$.

or $500 < \sqrt{250\,507} < 501$, a est un entier naturel supérieur à $\sqrt{250\,507}$ donc $a > 500$ soit $a \geq 501$

b. $a \equiv 1$ modulo 9 $\Leftrightarrow$ il existe un entier naturel k tel que $a = 9k + 1$

$a \geq 501 \Leftrightarrow 9k + 1 \geq 501 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{500}{9}$ or $55 < \dfrac{500}{9} < 56$

donc le plus petit entier naturel k tel que $k \geq \dfrac{500}{9}$ est 56, $a = 9 \times 56 + 1$ donc $a = 505$.

3\. Soit E la fonction partie entière, qui, à tout nombre réel x associe l'unique entier relatif n, tel que $n \leq x < n + 1$

<u>par exemple :</u> $2 \leq 2{,}9 < 3$ donc $E(2{,}9) = 2$ et $-3 \leq -2{,}9 < -2$ donc $E(-2{,}9) = -3$

Si a est solution, il existe un entier naturel k tel que $a = 9k + 1$ et $a \geq 501$.

$b^2 = a^2 - 250\,501$ donc $b = \sqrt{(9k+1)^2 - 250\,507}$ et b est un entier naturel donc :

Variables :	k est un entier naturel
Initialisations :	Affecter à k la valeur
Traitement :	TantQue $E\left(\sqrt{(9k+1)^2 - 250\,507}\right) \neq \sqrt{(9k+1)^2 - 250\,507}$
	│ Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin TantQue
Sortie :	Afficher $9k + 1$
	Afficher $\sqrt{(9k+1)^2 - 250\,507}$

k	$a = 9k + 1$	$a^2 - 250\,507$	b
56	505	4518	67,21606951
57	514	13 689	117

donc $a = 514$ et $b = 117$ or $250\,507 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 631 \times 397$