Un triangle ABC étant donné, on cherche à y inscrire un triangle $A_1B_1C_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC

1. première étape

On trace les droites orthogonales à (AC) en A, à (AB) en B et à (BC) en C. Elles se recoupent en A_1, B_1, C_1.
Soit *s* la similitude directe telle que $s(A_1) = C$ et $s(B_1) = A$

a. montrer que l'angle de *s* est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

b. déterminer les images par *s* des droites (C_1A_1) et (B_1C_1). En déduire l'image de C_1 par *s*.

c. Démontrer que le centre O de *s* appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$, $[CA_1]$ et $[BC_1]$. Placer O sur la figure

2. seconde étape

a Soit $h = s \circ s$. prouver que *h* est une homothétie

b. Soit A'_1, B'_1, C'_1 les images de A_1, B_1, C_1 par *h*
Montrer que A'_1 appartient aux droites (OA_1) et (BC)

c. Montrer que le triangle $A'_1B'_1C'_1$ répond bien aux conditions posées au départ

3. Conclusion

Le triangle ABC étant donné, expliquer comment construire $A_1B_1C_1$.

CORRECTION

1. première étape

a. *s* est la similitude directe telle que $s(A_1) = C$ et $s(B_1) = A$ donc l'angle de *s* est $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA})$. La droite (A_1B_1) est la perpendiculaire en C à (AC) donc soit $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou soit $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2}.+ 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc l'angle de *s* est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

b. L'image d'une droite par une similitude est une droite, l'angle de *s* est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc l'image de (C_1A_1) par *s* est la droite perpendiculaire à (C_1A_1) en $s(A_1)$ donc en C donc l'image de (C_1A_1) est la droite (BC).

l'image de (B_1C_1) par *s* est la droite perpendiculaire à (B_1C_1) en $s(B_1)$ donc en A donc l'image de (B_1C_1) est la droite (AB).

C_1 est le point d'intersection des droites (B_1C_1) et (C_1A_1) donc $s(C_1)$ est le point d'intersection de l'image de ces droites par *s* donc le point d'intersection de (BC) et (AB) donc l'image de C_1 par *s* est B.

c. Soit O le centre de la similitude directe *s*, donc l'angle de *s* est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

$s(A_1) = C$ donc $(\overrightarrow{OA_1}\,;\,\overrightarrow{OC}) = \pm\frac{\pi}{2}.+ 2k\pi$ donc le triangle OCA_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[CA_1]$.

$s(B_1) = A$ donc $(\overrightarrow{OB_1}\,;\,\overrightarrow{OA}) = \pm\frac{\pi}{2}.+ 2k\pi$ donc le triangle OAB_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[AB_1]$.

$s(C_1) = B$ donc $(\overrightarrow{OC_1}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{2}.+ 2k\pi$ donc le triangle OBC_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[BC_1]$.
le centre O de *s* appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$, $[CA_1]$ et $[BC_1]$.

2. seconde étape

a La composée de deux similitudes directes de même centre O, est une similitude de centre O de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles donc d'angle $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ donc π ou $\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ donc $-\pi$, *h* est donc une homothétie de centre O de rapport négatif.

b. *h* est une homothétie de centre O telle que $h(A_1) = A'_1$ donc les points O, A_1 et A'_1 sont alignés donc A'_1 appartient à la droite (OA_1).
$A'_1 = h(A_1) = s \circ s\,(A_1) = s(C)$
l'image de (C_1A_1) est la droite (BC) or C appartient à (C_1A_1) donc $s(C)$ appartient à (BC) donc A'_1 appartient à la droite (BC).
A'_1 est donc le point d'intersection des droites (OA_1) et (BC).

c. On montre de même B'_1 est le point d'intersection des droites (OB_1) et (AC) et C'_1 est donc le point d'intersection des droites (OC_1) et (AB). $h = s \circ s$ donc $A_1 \xrightarrow{s} C \xrightarrow{s} A'_1$ et $B_1 \xrightarrow{s} A \xrightarrow{s} B'_1$ et $C_1 \xrightarrow{s} B \xrightarrow{s} C'_1$

l'image par s de la droite (BC) est la droite ($A'_1C'_1$) or s est une similitude d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (BC) et ($A'_1C'_1$) sont perpendiculaires.

l'image par s de la droite (AC) est la droite ($A'_1B'_1$) or s est une similitude d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (AC) et ($A'_1B'_1$) sont perpendiculaires.

l'image par s de la droite (AB) est la droite ($B'_1C'_1$) or s est une similitude d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (AB) et ($B'_1C'_1$) sont perpendiculaires.

On a bien pour un triangle ABC donné, un triangle $A'_1B'_1C'_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC.

3. Conclusion

Soit ABC un triangle quelconque.

Construisons les droites :

d_1 perpendiculaire en A à (AC) ; d_2 perpendiculaire en en B à (AB) et d_3 perpendiculaire en en C à (BC).

Les droites d_1 et d_3 se coupent en A_1 ; d_1 et d_2 se coupent en B_1 ; d_2 et d_3 se coupent en C_1

Les cercles de diamètre [AB_1] et [A_1C] se coupent en A et en un second point O.

La droite (OA_1) coupe (BC) en A'_1

La droite (OB_1) coupe (AC) en B'_1

La droite (OC_1) coupe (AB) en C'_1.

On *a* alors pour un triangle ABC donné, un triangle $A'_1B'_1C'_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC.