Partie A.

Soit g la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par $g(x) = \frac{100}{17} \ln\left(\frac{x+1}{x+e^{-2,72}} \right)$.

1. Déterminer la limite de g en + ∞.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

Partie B.

Une cible d'un jeu de fléchettes est constituée d'un disque en bois de 16 cm de rayon. On appelle X la variable aléatoire qui à tout lancer d'une fléchette associe la distance entre le centre de la cible et le point d'impact de la fléchette, cette distance étant mesurée en cm. A la suite d'une étude statistique, on considère, que pour un joueur donné, la loi de probabilité de X est la loi exponentielle de paramètre λ.

1. On observe que, pour un joueur occasionnel, une fléchette sur 15 n'atteint pas la cible.

Comment, peut-on évaluer λ à l'aide de cette observation ?

Donner une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

2. Désormais, on prend λ = 0,17. La cible est peinte en bleu, sauf la zone centrale peinte en rouge, qui est un disque de rayon R et de même centre que la cible.

Soit n un entier naturel non nul.

a. Exprimer en fonction de R la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone rouge.

b. Exprimer en fonction de R la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone bleue.

c. Montrer que pour que la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone bleue soit n fois supérieure à la probabilité que celle-ci atteigne la zone rouge, il faut que $R \leq g(n)$ où g est la fonction définie dans la partie A.

3. Pour quelles valeurs de n a-t-on R > 0,5 ?
4. Déterminer la valeur de R, arrondie au mm le plus proche, pour laquelle la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone bleue est 4 fois supérieure à la probabilité que celle-ci atteigne la zone rouge.
5. Désormais, on prend R=1,2 cm.

Calculer les valeurs approchées à 10^{-4} près des probabilités :

a. d'atteindre avec une fléchette la zone rouge ;

b. d'atteindre avec une fléchette la zone bleue ;

c. d'atteindre la zone rouge sachant que la cible *a* été atteinte.

Partie C.

On considère que les lancers de fléchettes sont indépendants.

Soit Y la variable aléatoire qui à toute série de 5 lancers associe le nombre de fléchettes atteignant la zone rouge.

1. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
2. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $P(Y \geq 3)$. Interpréter cette probabilité.

CORRECTION

Partie A.

Soit g la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par $g(x) = \frac{100}{17} \ln\left(\frac{x+1}{x+e^{-2,72}} \right)$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x+e^{-2,72}} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{100}{17} \ln(1) = 0$

2. Soit $u(x) = \frac{x+1}{x+e^{-2,72}}$ alors $u'(x) = \frac{e^{-2,72}-1}{(x+e^{-2,72})^2}$

$e^{-2,72} < 1$ donc $u'(x) < 0$, $g'(x) = \frac{100}{17} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout $x \geq 0$, $u(x) \geq 0$ et $u'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$

$g(0) = \frac{100}{17} \ln\left(e^{2,72} \right) = \frac{100}{17} \times 2,72 = 16$

x	0	+ ∞
$g'(x)$	–	
g	16 ↘	0

Partie B.

1. Une fléchette sur 15 n'atteint pas la cible donc la distance entre le centre de la cible et le point d'impact est supérieure au rayon de la cible donc supérieure à 16 cm, donc la probabilité que la fléchette n'atteigne pas sa cible est P(X > 16) et cette probabilité est $\frac{1}{15}$, $P(X > 16) = \frac{1}{15} = e^{-16\lambda} \Leftrightarrow e^{16\lambda} = 15 \Leftrightarrow 16\lambda = \ln 15 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(15)}{16}$ donc $\lambda \approx 0{,}169$

2. *a*. La probabilité qu'une fléchette atteigne la zone rouge est $P(X < R) = 1 - e^{-\lambda R} = 1 - e^{-0{,}17 R}$

b. la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone bleue est $P(R < X \leq 16) = P(X \leq 16) - P(X \leq R) = 1 - e^{-16\lambda} - (1 - e^{-\lambda R})$
$P(R < X \leq 16) = e^{-\lambda R} - e^{-16\lambda}$ soit $P(R < X \leq 16) = e^{-\lambda R} - e^{-2{,}72}$

c. $P(R < X \leq 16) = n\,P(X < R) \Leftrightarrow P(X \leq 16) - P(X \leq R) = P(X \leq R) \Leftrightarrow P(X \leq 16) = (n + 1)\,P(X \leq R)$
$1 - e^{-2{,}72} = (n + 1)(1 - e^{-\lambda R}) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda R} = \frac{1 - e^{-2{,}72}}{n+1} \Leftrightarrow e^{-\lambda R} = 1 - \frac{1 - e^{-2{,}72}}{n+1} \Leftrightarrow e^{-\lambda R} = \frac{n - e^{-2{,}72}}{n+1} \Leftrightarrow e^{\lambda R} = \frac{n+1}{n + e^{-2{,}72}} \Leftrightarrow \lambda R = \ln\left(\frac{n+1}{n + e^{-2{,}72}}\right)$ or $\lambda = 0{,}17 = \frac{17}{100}$ donc $R = \frac{100}{17} \ln\left(\frac{n+1}{n + e^{-2{,}72}}\right)$ soit $R = g(n)$

3. $R > 0{,}5 \Leftrightarrow g(n) > 0{,}5$
La fonction g est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $g(10) < 0{,}5$ et $g(11) > 0{,}5$ donc pour tout entier $n \geq 11$, $g(n) < 0{,}5$ et pour tout entier n compris entre 0 et 10, $g(n) > 0{,}5$.
$R > 0{,}5 \Leftrightarrow 0 \leq n \geq 10$

4. La probabilité qu'une fléchette atteigne la zone bleue est 4 fois supérieure à la probabilité que celle-ci atteigne la zone rouge $\Leftrightarrow R = g(4)$ donc $R \approx 1{,}2$ cm

5. *a*. une fléchette la zone rouge : $P = 1 - e^{-0{,}17 \times 1{,}2} = 0{,}1845$

b. Une fléchette la zone bleue : $P = e^{-0{,}17 \times 1{,}2} - e^{-2{,}72} = 0{,}7496$

c. d'atteindre la zone rouge sachant que la cible *a* été atteinte.
$P_{X \leq 16}(X \leq 4) = \frac{P(X \leq 4)}{P(X \leq 16)} = \frac{0{,}1845}{0{,}1845 + 0{,}7496} = 0{,}1975$

Partie C.

1. On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elle *a* deux issues :
   - réussite : la fléchette atteint la zone rouge ($p = 0{,}1845$)
   - échec : la fléchette n'atteint pas la zone rouge ($q = 1 - p = 0{,}8155$)

donc Y suit une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,1845)

2. $P(Y \geq 3) = 0{,}0467$
Une fléchette atteindra au moins 3 fois la cible avec une probabilité 0,0467