Nouvelle-Calédonie novembre 2009

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{-x}$.

On note f' la fonction dérivée de f.

1\. *a*. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

c. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2\. Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $I(a) = \int_0^a f(x)\,dx$.

a. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

b. À l' aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a : $I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

c. En déduire pour tout nombre réel a : $\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

3\. Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

On note C la courbe représentative de g et P celle de h.

a. Montrer que les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes C et P.

CORRECTION

1\. *a*. $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ de plus $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b. $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x(2 - x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

c. f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 0]$

f est croissante sur $[0 ; 2]$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[0 ; 2]$

f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$ donc pour tout x réel, $f(x) \geq 0$

2\. *a*. f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f(x) \geq 0$ donc si $a \geq 0$ alors $I(a) \geq 0$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f(x) \geq 0$ donc si $a \leq 0$ alors $I(a) \leq 0$

b. $u'(x) = e^{-x}$ donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = x^2$ donc $v'(x) = 2x$

donc $I(a) = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -2x e^{-x}\,dx = -a^2 e^{-a} + 2\int_0^a x e^{-x}\,dx$

de même si $u'(x) = e^{-x}$ donc $u(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$

$\int_0^a x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-x}\,dx = -a e^{-a} - \left[e^{-x}\right]_0^a = -a e^{-a} - e^{-a} + 1 = -e^{-a}(1 + a) + 1$

$I(a) = -a^2 e^{-a} - 2e^{-a}(1 + a) + 2 = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

c. Pour tout nombre réel a : $I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$ donc $e^a I(a) = 2e^a - 2\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$

donc pour tout nombre réel a : $\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

3\. *a*. $g'(x) = e^x$ donc la tangente à C au point d'abscisse 0 est la droite passant par A $(0 ; 1)$ de coefficient directeur $g'(0) = 1$

$h'(x) = 1 + x$ donc la tangente à P au point d'abscisse 0 est la droite passant par A $(0 ; 1)$ de coefficient directeur $h'(0) = 1$

Les deux tangentes passent par le même point et ont le même coefficient directeur donc sont confondues.

les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b. $g(x) - h(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ d'après la question 2. *c*. $g(x) - h(x) = 2\,I(x)$ or :

si $x \geq 0$ alors $I(x) \geq 0$ donc si $x \geq 0$, $g(x) - h(x) \geq 0$ donc C est au dessus de P sur $[0 ; +\infty[$

si $x \leq 0$ alors $I(x) \leq 0$ donc si $x \leq 0$, $g(x) - h(x) \leq 0$ donc C est en dessous de P sur $]-\infty ; 0]$.