ENONCE

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chaque question, une seule des .1 propositions est exacte. Le candidat doit cocher la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $z \in$ C vérifiant $\bar{z} + |z| = 6 + 2$ i. L'écriture algébrique de z est :

$\frac{8}{3} - 2$ i $\qquad - \frac{8}{3} - 2$ i $\qquad \frac{8}{3} + 2$ i $\qquad - \frac{8}{3} + 2$ i

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}\, y$ vérifiant $|z - 1| = |z + \text{i}|$ est la droite d'équation :

$y = x - 1 \qquad y = -x \qquad y = -x + 1 \qquad y = x$

3. Dans le plan complexe; l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}\, y$ vérifiant la relation $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$

est inclus dans :

La droite d'équation $y = -x$

Le cercle de centre I(1 + i) et de rayon R = $\sqrt{2}$.

La droite d'équation $y = x$.

Le cercle de diamètre [AB], A et B étant les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2$ i.

CORRECTION

1. Les complexes $\frac{8}{3} - 2$ i ; $- \frac{8}{3} - 2$ i ; $\frac{8}{3} + 2$ i ; $- \frac{8}{3} + 2$ i ont à un signe près la même partie réelle et la même partie imaginaire donc auront le même module.

$\left|\frac{8}{3} - 2i\right|^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2 = \frac{100}{9}$ donc pour tous les complexes donnés, on a $|z| = \frac{10}{3}$ donc $\bar{z} = 6 + 2\text{ i} - \frac{10}{3}$

$\bar{z} = \frac{8}{3} + 2$ i donc $z = \frac{8}{3} - 2$ i

2. Deux justifications sont possibles :

l'une rapide (pour un Q.C.M.)

soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe (– i) alors $|z - 1| = |z + \text{i}| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow$ AM = BM $\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]

On voit dans un repère orthonormé que c'est la droite $y = -x$.

L'autre, par le calcul :

$|z - 1| = |z + \text{i}| \Leftrightarrow |z - 1|^2 = |z + \text{i}|^2 \Leftrightarrow |(x - 1) + \text{i}\, y|^2 = |x + \text{i}\,(y + 1)|^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow -2x = 2y \Leftrightarrow y = -x$

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2$ i.

$\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M} = \frac{z_{\overrightarrow{MA}}}{z_{\overrightarrow{MB}}}$ donc $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA})$.

$\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle AMB est rectangle en M avec M $\neq$ A et M $\neq$ B

Propriété : ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si le sommet de l'angle droit A appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse [BC].

le triangle AMB est rectangle en M donc M appartient au cercle de diamètre [AB].