Partie A

On donne ci dessous le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\,e^{-2}$	$\searrow$	0

1. On définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}$ en posant $F : x \to \int_2^x f(t)\,dt$. Que vaut $F'(x)$?

2. Déterminer (en justifiant) les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $0 \leq F(4) \leq 8\,e^{-2}$

Partie B

La fonction f considéré dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\,e^{-x}$.

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$

1. On désigne dans le problème C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g.

1\. 1. Démontrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A

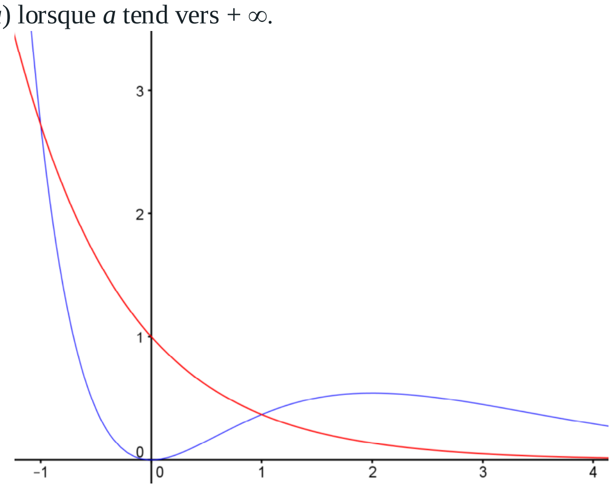
1\. 2. Etudier la position relative des courbes C_f et C_g.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$

2\. 1. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x^2 - 2\,x - 1)\,e^{-x}$ est une primitive de h.

2\. 2. En annexe sont tracées les courbes C_f et C_g. Soit a un réel supérieur ou égal à 1. On considère la partie du plan limitée par les courbes C_f, C_g les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.
Exprimer son aire $A(a)$ à l'aide d'une intégrale.
Déterminer cette aire $A(a)$ exprimée en unité d'aire

2\. 3. Déterminer la limite de $A(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.



CORRECTION

Partie A :

1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $F : x \to \int_2^x f(t)\,dt$ est la primitive nulle en 2

de f donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est f. $F'(x) = f(x)$

2. D'après le tableau de variation de f, $f(x) \geq 0$ donc $F'(x) \geq 0$, la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. f est croissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc pour tout t de $[\,2\,;+\infty\,[$, $0 \leq f(t) \leq f(2)$ donc $0 \leq f(t) \leq 4\,e^{-2}$

f continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_2^4 0\,dt \leq \int_2^4 f(t)\,dt \leq \int_2^4 4\,e^{-2}\,dt$ soit $0 \leq F(4) \leq 4\,e^{-2} \int_2^4 1\,dt$ soit $0 \leq F(4) \leq 8\,e^{-2}$

Partie B :

1\. 1. Soit $\begin{cases} u(x) = x^2 & u'(x) = 2\,x \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -\,e^{-x} \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables) et $f'(x) = 2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x} = x\,(2 - x)\,e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-x^2 + 2\,x$

$-x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ donc $-x^2+2x>0 \Leftrightarrow 0<x<2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4\,e^{-2}$	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,e^{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,e^{-x}=+\infty$

1. 2. $f(x)-g(x)=x^2\,e^{-x}-e^{-x}=(x^2-1)\,e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f(x)-g(x)$ a le même signe que x^2-1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, C_f est au dessus de C_g

sur $]-1\,;1[$, C_f est en dessous de C_g

Les deux courbes sont sécantes aux points d'abscisses 1 et -1.

2. 1. H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables).

Soit $\begin{cases} u(x)=-x^2-2x-1 & u'(x)=-2x-2 \\ v(x)=e^{-x} & v'(x)=-e^{-x} \end{cases}$ donc $H'(x)=(-2x-2)\,e^{-x}-e^{-x}\,(-x^2-2x-1)$

$H'(x)=(-2x-2+x^2+2x+1)\,e^{-x}$

$H'(x)=(x^2-1)\,e^{-x}=h(x)$ donc la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=(-x^2-2x-1)\,e^{-x}$ est une primitive de h.

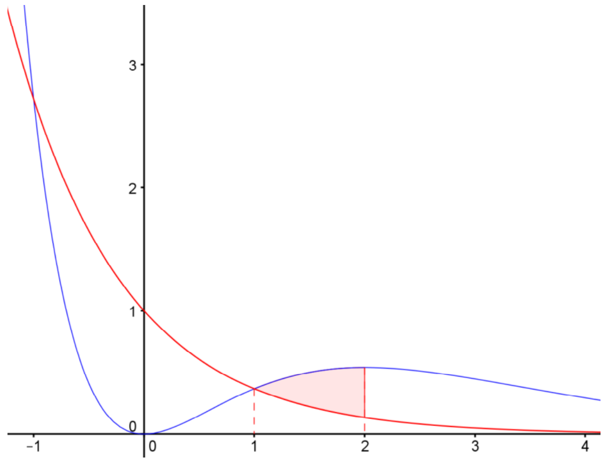
2. 2. $a\geq 1$ donc sur $[1\,;a]$, C_f est au dessus de C_g, f et g sont deux fonction positives sur $[1\,;a]$ donc :

$A(a)=\int_1^a f(t)\,dt-\int_1^a g(t)\,dt=\int_1^a [\,f(t)-g(t)\,]\,dt$

$A(a)=\int_1^a h(t)\,dt=H(a)-H(1)$

$A(a)=-(a^2+2a+1)\,e^{-a}-(-4)\,e^{-1}$

$A(a)=-(a+1)^2\,e^{-a}+4\,e^{-1}$ unités d'aire



2. 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x)\,e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} A(a)=4\,e^{-1}$.