Amérique du Nord Juin 1999 Bac ES

Une salle de spectacle propose pour la saison des abonnements pour 4 , 5 ou spectacles.

Dans la population des abonnés la répartition est la suivante :

- 43,5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles ;
- 33% ont choisi l'abonnement 5 spectacles ;
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles ;
- 40% ont choisi l'abonnement 5 spectacles ;
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

On note A l'événement : " l'abonné interrogé a moins de 25 ans ".

Ainsi, la probabilité $p(\mathrm{A})$ de cet événement est 0,65.

On note B l'événement : " l'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ".

Pour tout événement V , on note $\overline{\mathrm{V}}$ l'événement contraire de V.

1. *a*. Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus?

b. Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles?

c. Décrire l'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et démontrer que la probabilité de cet événement est égale à 0,26.

2. *a*. Démontrer que la probabilité $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$ est égale à 0,07.

b. En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que $\overline{\mathrm{A}}$ est réalisé.

3. L'abonnement pour 4 spectacles coût 50 euros, celui pour 5 spectacles coûte 60 euros, et celui pour 6 spectacles coûte 70 euros.

On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.

a. Donner la loi de probabilité de X en complétant le tableau suivant :

x_i	50	60	70
$p(\mathrm{X} = x_i)$			

b. Calculer l'espérance de X.

CORRECTION

1 : Il faut commencer par traduire en langage des probabilités les hypothèses de l'énoncé.

A étant l'événement "*moins de 25 ans*" et B l'événement "*a choisi 5 spectacles*",

l'énoncé nous dit que : $p(\mathrm{A}) = 0{,}65$ car 65% des abonnés ont moins de 25 ans.

a : La probabilité qu'un abonné ait 25 ans ou plus est donc : $(1 - 0{,}65) = 0{,}35$

$p(\mathrm{B}) = 0{,}33$ car 33% des abonnés ont choisi l'abonnement 5 spectacles.

b : $p(\mathrm{B} / \mathrm{A}) = 0{,}40$ car 40% des abonnés de moins de 25 ans ont choisi l'abonnement 5 spectacles.

c : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A} / \mathrm{B}) \times p(\mathrm{A})$, donc : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}40 \times 0{,}65 = 0{,}26$.

L'événement ($\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$) est l'événement " *l'abonné a moins de 25 ans* ET *a choisi 5 spectacles* ".

2. *a* : On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$.

Comme $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}26$, d'après la question précédente et que $p(\mathrm{B}) = 0{,}33$, d'après les hypothèses de l'énoncé, on en déduit que : $p(\mathrm{B}) = 0{,}33 - 0{,}26 = 0{,}07$.

b : On sait que $p(\mathrm{B} / \overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})}{p(\overline{\mathrm{A}})}$ donc : $p(\mathrm{B} / \overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{0{,}07}{0{,}35} = 0{,}2$.

3. D'après les hypothèses de l'énoncé, on sait que 43,5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles.

Donc $p(\mathrm{X} = 50) = 0{,}435$.

$p(\mathrm{X} = 60) = 0{,}33$ et $p(\mathrm{X} = 70) = 1 - 0{,}435 - 0{,}33 = 0{,}235$.

D'où le tableau de la loi de probabilité de X :

a :

x_i	50	60	70
$p(\mathrm{X} = x_i)$	0,435	0,33	0,235

b : L'espérance E[X] de X est définie par : $\mathrm{E[X]} = \sum_i x_i \; p(\mathrm{X} = x_i)$

Donc, $\mathrm{E[X]} = 0{,}435 \times 50 + 0{,}33 \times 60 + 0{,}235 \times 70 = 58$.