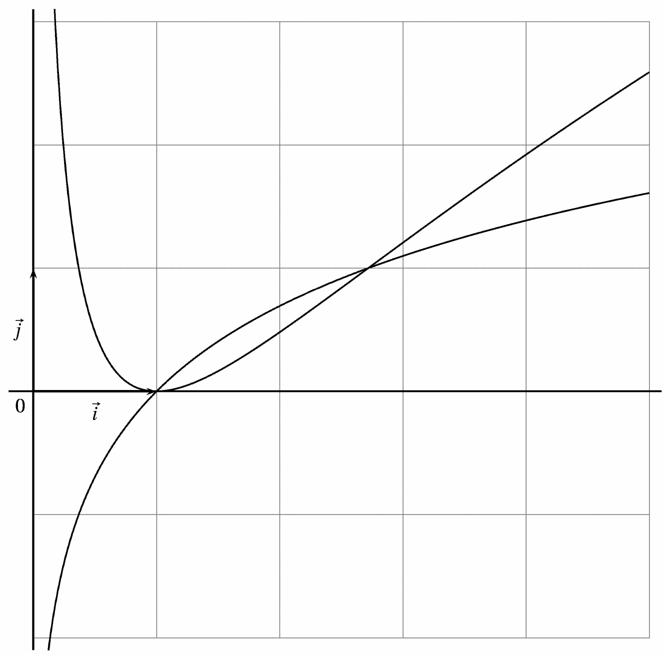
LIBAN JUIN 2007

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

On note C et C ′ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes C et C ′ sont données ci-dessous.



1. *a.* Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b. En déduire la position relative des deux courbes C et C ′ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Pour x appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C ′ de même abscisse.

a. Soit h la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
Étudier les variations de la fonction h sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b. En déduire que sur l'intervalle $[1\,;e]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{e}$.

c. Résoudre dans $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

d. En déduire que, sur $]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,e\,;+\infty\,[$, il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. *a.* A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x \, dx$.

b. Vérifier que la fonction G définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $G(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$ est une primitive de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes C , C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
Déterminer l'aire A en unités d'aire de cette partie du plan.

CORRECTION

1. *a*.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	–	0	+		+	
$1 - \ln x$	‖	+		+	0	–	
$(\ln x)(1 - \ln x)$	‖	–	0	+	0	–	

b. $f(x) - g(x) = (\ln x)(1 - \ln x)$

donc sur $]\,0\,;1\,[$ et $]\,e\,;+\infty\,[$ C_f est en dessous de C_g

donc sur $]\,1\,;e\,[$ C_f est au dessus de C_g

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisse 1 et e.

2. *a*. h est définie dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $h'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$

$x > 0$ donc $h'(x)$ *a* le même signe que $1 - 2\ln x$

$1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$1 - 2\ln x$	‖	+	0	–	+
$h'(x)$	‖	+		+	–
h	‖	↗		↘	

2. *b*. h est croissante sur $]\,0\,;+\sqrt{\text{e}}\,]$ et décroissante sur $[\sqrt{\text{e}}\,;+\infty\,[$ donc h admet un maximum en $\sqrt{\text{e}}$.
Sur [1 ; e], C_f est au dessus de C_g donc MN = $f(x) - g(x)$
MN = $h(x)$

donc la distance MN admet un maximum pour $x = \sqrt{\text{e}}$ et la valeur maximale de cette distance est $h(\sqrt{\text{e}}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ soit $\frac{1}{4}$.

2. *c*. Soit X = ln x, l'équation devient : $X^2 - X - 1 = 0$
$\Delta = 5$ donc $X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$X = \ln x \Leftrightarrow x = \text{e}^X$
on obtient donc pour solutions $x_1 = \text{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = \text{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

2. *d*. sur $]\,0\,;1\,[$ et $]\,\text{e}\,;+\infty\,[$ C_f est en dessous de C_g
donc la distance MN = $g(x) - f(x)$
MN = 1 $\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \text{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = \text{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
d'après la question précédente

$0 < x_1 < \text{e}$ et $x_2 > \text{e}$ donc sur $]\,0\,;1\,[$ et $]\,\text{e}\,;+\infty\,[$, il existe deux réels a et b ($a = \text{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $b = \text{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ avec $a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. *a*. $\int_1^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x = [x \ln x]_1^{\text{e}} - \int_1^{\text{e}} x \times \frac{1}{x}\,\text{d}x$
$\int_1^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x = [x \ln x]_1^{\text{e}} - \int_1^{\text{e}} 1\,\text{d}x = \text{e}\ln\text{e} - \ln 1 - (\text{e} - 1)$
ln e = 1 et ln 1 = 0 donc $\int_1^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x = 1$

3. *b*. G est dérivable sur $]\,0\,;\infty\,[$
$G'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + x\left[\frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x}\right]$
$G'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2$
$G'(x) = (\ln x)^2 = g(x)$
donc G est une primitive de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

3. *c*. Sur [1 ; e], C_f est au dessus de C_g
$A = \int_1^{\text{e}} \ln x\,\text{d}x - \int_1^{\text{e}} (\ln x)^2\,\text{d}x$
A = 1 – [G(e) – G(1)]
A = 1 – (e – 2)
A = 3 – e *u.a.*