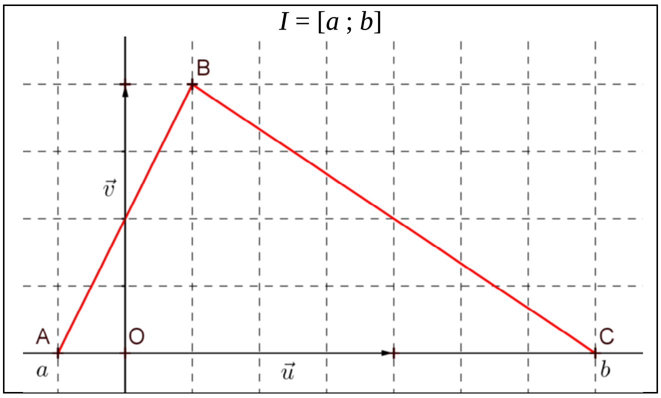
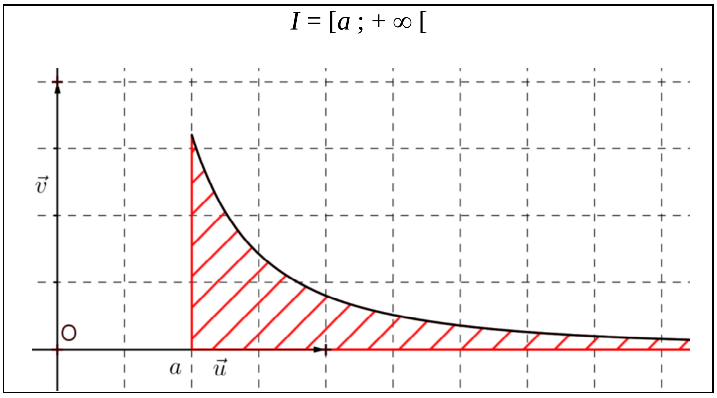
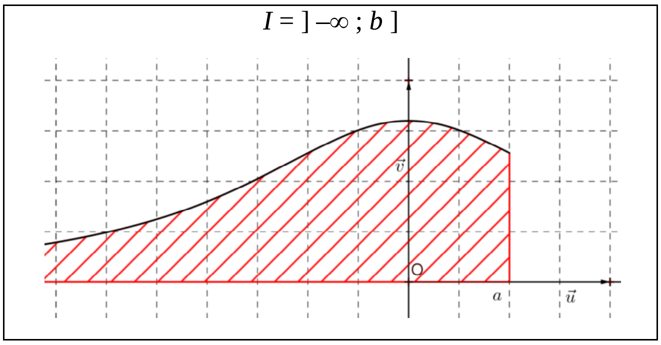
1. Lois de probabilité à densité

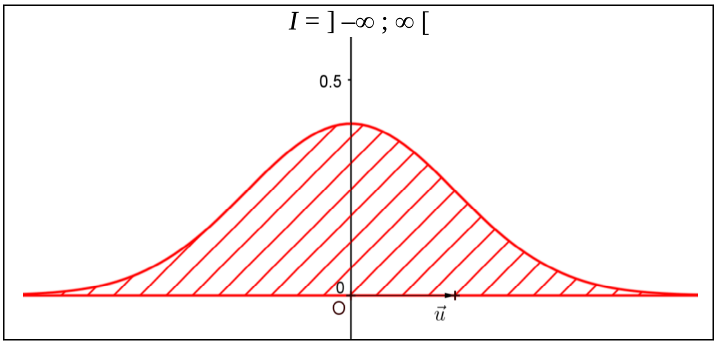
Définition : Une fonction f, définie sur un intervalle I de R, est une densité de probabilité sur I lorsque :

- f est continue sur I ;
- f est à valeurs positives sur I ;
- l'aire sous la courbe de f est égale à 1 *u.a.*









On considère une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une loi de probabilité P.
Soit X une variable aléatoire, fonction de Ω dans ., qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de R
Soit f une fonction, définie sur I, qui est une densité de probabilité sur I.

Définition : La variable aléatoire X suit la loi de densité f sur l'intervalle I (ou est « à densité f sur I ») lorsque, pour tout événement J inclus dans I, la probabilité de l'événement ($X \in J$) est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine :

$$\{M(x\,;\,y)\,;\, x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Remarque : On retrouve que : $P(X \in I) = 1$.

En général, les probabilités seront calculées par des intégrales.
On admet que l'on peut prolonger la loi de probabilité à toutes unions finies d'intervalles de telle sorte que l'on ait la propriété :
Propriété : Si J et J' sont deux unions finies d'intervalles inclus dans I, on a :

$$P(X \in J \cup J') = P(X \in J) + P(X \in J')$$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur l'intervalle I, on a les propriétés suivantes.

a. Pour tout intervalle $J = [c\,;\,d]$ de I, on a : $P(c \leq X \leq d) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$

b. Pour tout réel α de I, on a : $P(\alpha) = 0$

c. Pour tous réels c et d de I,

$$P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d) = P(c < X < d) =$$

d. Soit J un intervalle, on a : $P(X \in \overline{J}) = P(X \in J)$.

Définition Soit I' un intervalle de I tel que $P(X \in I') \neq 0$ et soit J un autre intervalle de I. On définit la probabilité conditionnelle

$P_{X \in I'}(X \in J)$ par l'égalité : $P_{X \in I'}(X \in J) = \dfrac{P(X \in I' \cap J)}{P(X \in I')}$.

L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire à densité f sur $[a\,;\,b]$; est définie par :

$$E(X) = \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Lois uniformes

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,0\,;\,1]$; si sa densité est la fonction définie sur $[\,0\,;\,1]$ par $f(x) = 1$

Propriété : Pour tout intervalle $[\,c\,;\,d]$ inclus dans $[\,0\,;\,1]$; , on a : $P\,(c \le X \le d) = d - c$

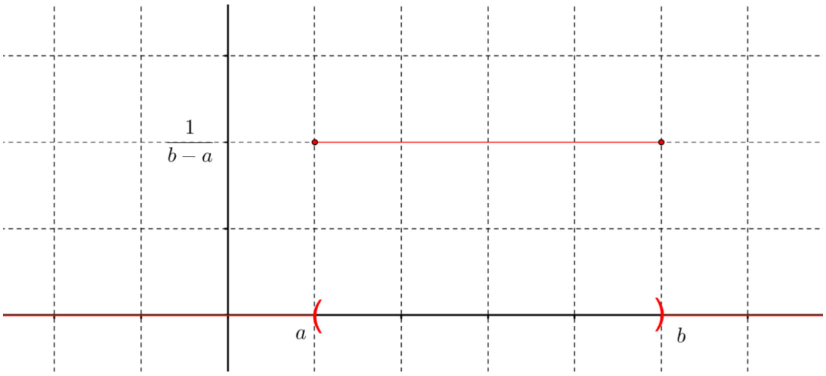
Définition : Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$.

Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $I = [a\,;\,b]$ si et seulement si sa densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note: X suit la loi **U** ($[a\,;\,b]$).

Pour tout intervalle J contenu dans I, $P\,(\,X \in J\,) = \dfrac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$.



Propriété : Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$.

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

3. Lois exponentielles

Définition : Soit λ un réel strictement positif.

La variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Propriétés : Quels que soient les nombres réels positifs a, c et d, on a :

$$P(X \in [c\,;\,d] = P(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$$

$$P(X \le a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

$$P(X \ge a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

Définition : On définit l'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ en posant :

$$E(\,X\,) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par : $E(\,X\,) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Propriété : **Durée de vie sans vieillissement**

Soit λ un réel strictement positif.

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors cette variable aléatoire vérifie la propriété dite de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{X \ge t}(\,X \ge t + h\,) = P\,(\,X \ge h\,) \text{ pour tous réels } t \text{ et } h \text{ positifs.}$$