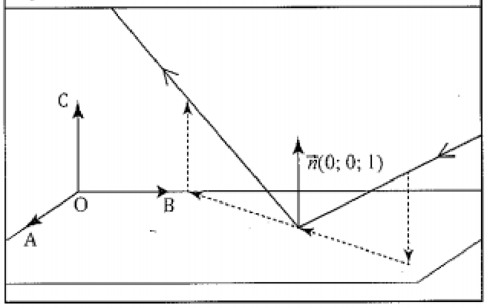
Asie juin 2016

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs disposés en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.

On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.



Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OAE), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}$ $(a\,;b\,;-c)$
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}$ $(-a\,;b\,;c)$
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}$ $(a\,;-b\,;c)$

1. *Propriété des catadioptres.*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a\,;b\,;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}$ $(-2\,;-1\,;-1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point I_1 $(2\,;3\,;0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ $(-2\,;-1\,;1)$ et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).*

a. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b. Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c. Soit I_2 le point de coordonnées $(0\,;2\,;1)$. Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}$ $(2\,;-1\,;1)$ passant par le point I_2 $(0\,;2\,;1)$.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC).

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière.*

On donne le vecteur $\vec{u}$ $(1\,;-2\,;0)$, et on note P le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c. Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

CORRECTION

1. *Propriété des catadioptres.*

Le rayon lumineux de vecteur directeur initial $\vec{v}$ $(a\,;b\,;c)$ réfléchi par le plan (OAE), devient le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}$ $(a\,;b\,;-c)$

Le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}$ $(a\,;b\,;-c)$, réfléchi par le plan (OBC), devient le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ $(-a\,;b\,;-c)$

Le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ $(-a\,;b\,;-c)$, réfléchi par le plan (OAC), devient le rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}$ $(-a\,;-b\,;-c)$

$\overrightarrow{v_3}=-\vec{v}$ donc si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a\,;b\,;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).*

a. Une représentation paramétrique de la droite d_2 est $\begin{cases} x = -2t+2 \\ y = -t+3 \\ z = t \end{cases}$.

b. $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal au plan (OBC) d'équation cartésienne $x = 0$.

c. $\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{OA} = -2$ donc $\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{OA} \neq 0$ donc la droite d_2 n'est pas parallèle au plan (OBC) donc est sécante à ce plan.

I_2 est le point de coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc $I_2 \in$ (OBC).

Le point de paramètre $t = 1$ de la droite d_1 a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc est I_2 donc le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

3. Le plan (OAC) a pour équation $y = 0$.

Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t+2 \\ z = t+1 \end{cases}$

Cherchons le point d'intersection s'il existe de cette droite et du plan (OAC)

Ce point a des coordonnées telles que $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t+2 \\ z = t+1 \end{cases}$ et $y = 0$ donc $-t+2 = 0$ soit $t = 2$

Le point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC) a pour coordonnées (4 ; 0 ; 3).

4. *Étude du trajet de la lumière.*

a. $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 = -2 + 2 = 0$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 = -2 + 2 = 0$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ donc est orthogonal au plan P défini par les droites d_1 et d_2.

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont situées dans un même plan

$\vec{u}$ (1 ; – 2 ; 0) est un vecteur normal au plan P donc le plan P défini par les droites d_1 et d_2 a une équation de la forme $x - 2y + d = 0$

$I_2 \in d_1 \cap d_2$ donc $x_{I_2} - 2y_{I_2} + d = 0$ soit $0 - 2 \times 2 + d = 0$ donc $d = -4$

Une équation de P est $x - 2y - 4 = 0$.

Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t+2 \\ z = t+1 \end{cases}$. Soit M $(2t ; -t+2 ; t+1)$ un point quelconque de cette droite, vérifions si pour tout t, ce point appartient à P.

$x_M - 2y_M - 4 = 2t - 2(-t+2) - 5 = 2t + 2t - 4 - 5 = 4t - 4$ donc si $t \neq 2$, $x_M - 2y_M - 5 \neq 0$ donc M $\notin$ P

d_3 perce P en un seul point I_3 donc les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan

c. Le point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC) a pour coordonnées (4 ; 0 ; 3).

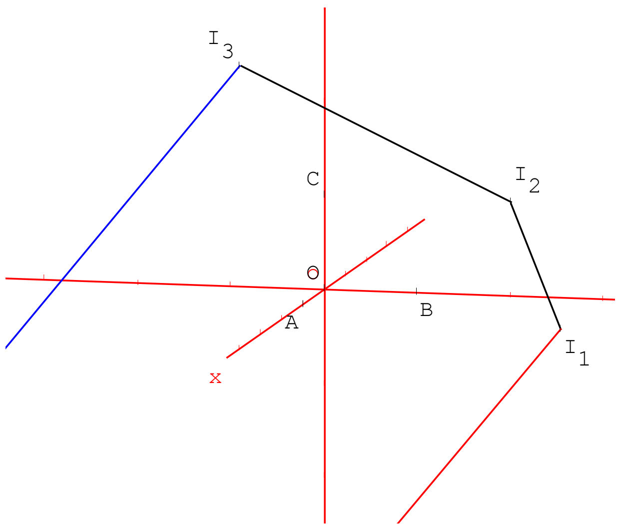
La droite d_4 qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC) donc contient le point I_3.

La droite d_4 est parallèle à d_1 donc a pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = -2t+4 \\ y = -t \\ z = -t+3 \end{cases}$.

Soit M $(-2t+4 ; -t ; -t+3)$ un point quelconque de cette droite, vérifiions si pour tout t, ce point appartient à P.

$x_M - 2y_M - 5 = -2t + 4 - 2 \times (-t) - 5 = -2t + 4 + 2t - 5 = -1$ donc $x_M - 2y_M - 5 \neq 0$, M $\notin$ P donc les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.



En rouge d_1 en bleu d_4