Exercice 1 (6 points) **Commun à tous les candidats**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par : $f(x)=5\ln(x\pm 3)-x$.

1. *a.* On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[\ 0;+\infty\ [$.

b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a : $f(x)=x\left(5\dfrac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

2. *a.* Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[\ 14\ ;15\ ]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=4 \\ \text{pour tout entier naturel } n\neq 0,\ u_{n+1}=5\ln(u_n+3)\end{cases}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par : $g(x)=5\ln(x+3)$.

En **Annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite **D** d'équation $y=x$ et la courbe **C**, courbe représentative de la fonction g.

1. *a.* Construire sur l'axe des abscisses de **l'Annexe I** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. *a.* Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

b. Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où α est défini dans la partie A question 2.*a*.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0\leq u_n\leq\alpha$$

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1.*b* de la partie 3.

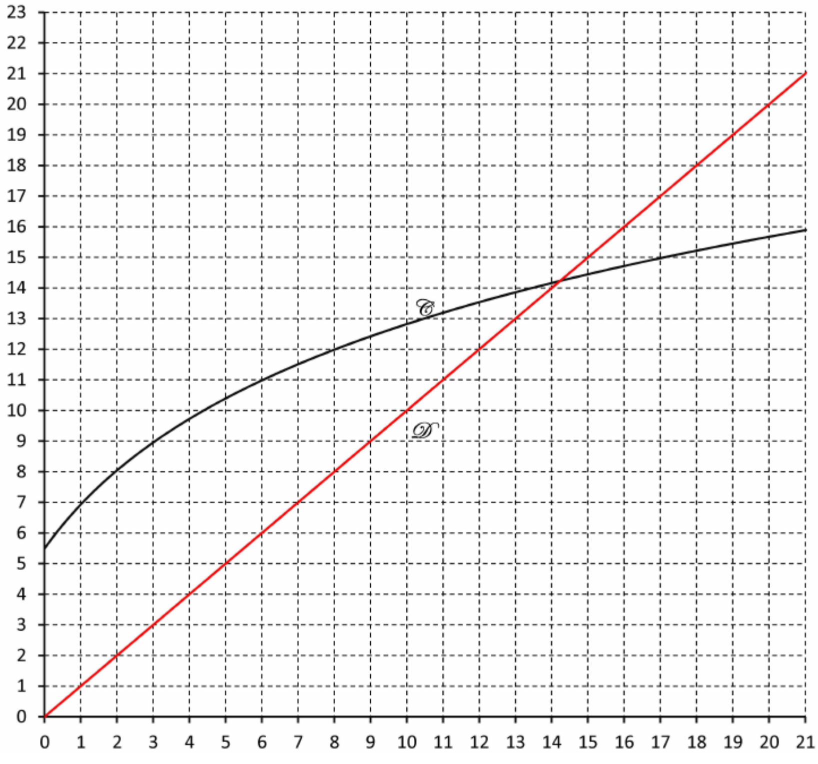
e. En utilisant la question 2.*a* de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u-14{,}2<0$
u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).



Exercice 2 (4 points) **Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U. en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.

On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.

3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :

- on tire une boule de l'urne U. Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau ;
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.

2. On appelle Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire Y prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon. Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

3. On appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience. Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.

4. On appelle proportion moyenne de boules rouges le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.

Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**

Partie A : restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant :

> Soit a un réel.
>
> Soit (E_0) l'équation différentielle de fonction inconnue y de variable réelle, dérivable de fonction dérivée y' :
>
> $$y' = a\,y \qquad (E_0)$$
>
> Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $x \rightarrow C\,e^{ax}$, où C est une constante réelle.

On considère a et b deux réels, avec a non nul.

Démontrer que les solutions de l'équation différentielle de fonction inconnue y de variable réelle, dérivable de fonction dérivée y' :

$$y' = a\,y + b \quad (E)$$

sont les fonctions de la forme $x \rightarrow C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse

1. **Affirmation 1 :**

Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' + 3\,y = 6$ alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

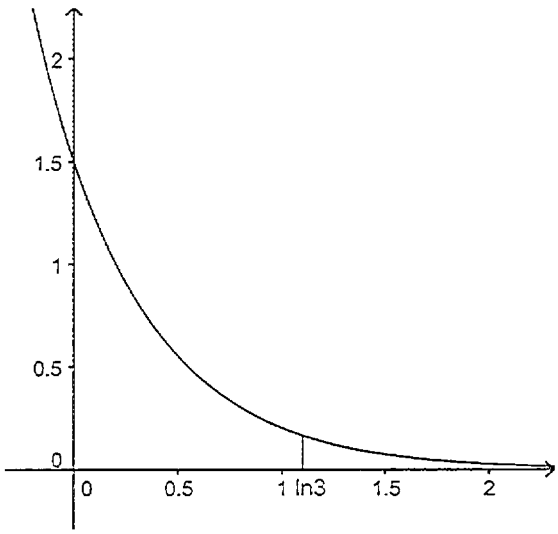
2. **Affirmation 2:**

Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' = y$ alors :

pour tous réels α et β, $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$.

3. La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2\,y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\dfrac{3}{2}$ *(voir figure ci-contre).*

Affirmation 3 : l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(3)$ est $\dfrac{2}{3}$.



Exercice 4 (5 points)
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ on appelle A le point d'affixe 1 et **C** le cercle de centre A et de rayon 1.
La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique. Partie A

Partie A

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$, où z est un nombre complexe.
On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes C.

2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle **C**.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{2z-1}{2z-2}$.

1. Placer le point A et tracer le cercle **C** sur une figure que l'on complètera au furet à mesure.

2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a : $(z'-1)(z-1) = \dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :

- $\mathrm{AM} \times \mathrm{AM'} = \dfrac{1}{2}$
- $\mathrm{M'} \neq \mathrm{A}$;
- $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM'}}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

4. On considère le point P d'affixe $z_\mathrm{P} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.

5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P ', image de P par f, et réaliser cette construction.

6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans 1'évaluation.*

Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$. Soit M' son image par f.

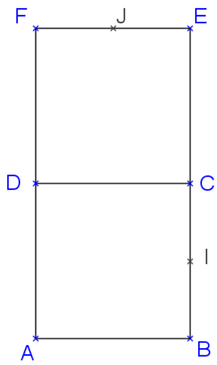
a. Montrer que le point M ' appartient au cercle **C** ' de centre O de rayon 1.

b. Tout point de **C** ' a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 4 (5 points)
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère deux carrés directs ABCD et DCEF de côté 1. Le point I est milieu de [BC] et le point J est milieu de [EFJ (voir figure ci-dessous).



1. On considère la rotation r de centre D qui transforme A en C. Justifier que r (I) = J.

2. Justifier que r est l'unique similitude directe qui transforme A en C et I en J.

3. On appelle s la similitude directe qui transforme A en I et C en J.

On se place dans le repère $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$.

a. Donner les affixes des points A, C, I et J.

b. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\right) z + 1 + \dfrac{1}{2}i$.

c. Montrer que le point D est le centre de s.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère trois points M, N, P distincts entre eux et distincts du point O. On appelle m, n, p leurs affixes respectives.
On définit la similitude directe s_1 qui transforme O en M et N en P et la similitude directe s_2 qui transforme O en N et M en P.

1. Montrer que l'écriture complexe de s_1 est $z' = \dfrac{p-m}{n} z + m$.

On admet que l'écriture complexe de s_2 est $z' = \dfrac{p-n}{m} z + n$

2. *a.* Montrer que si OMPN est un parallélogramme alors s_1 et s_2 sont des translations.

b. On suppose que OMPN n'est pas un parallélogramme. Justifier que s_1 et s_2 ont chacune un centre, et montrer que ces deux points sont confondus.

CORRECTION

Exercice 1 (6 points) **Commun à tous les candidats**

Partie A

1. ***a.*** $f\,'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1 = \dfrac{5-(x+3)}{x+3} = \dfrac{-x+2}{x+3}$

donc si $0 \leq x < 2$ alors $-x+2>0$ donc $f\,'(x) > 0$; si = 2, $f\,'(x) = 0$
si $x > 2$ alors $-x+2<0$ donc $f\,'(x) < 0$

b.

x	0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	

c. pour tout x strictement positif on a :

$$x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 5\ln x - x + 5\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$$
$$= 5\ln x - x + 5\,[\ln(x+3) - \ln x]$$
$$= 5\ln x - x + 5\ln(x+3) - 5\ln x$$
$$= 5\ln(x+3) - x = f(x)$$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

e.

x	0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	$-\infty$

2. ***a.*** $5\ln 3 > 0$ et f est strictement croissante sur $[0\,;2]$ donc pour tout x de $[0\,;2]$, $f(x) \geq 5\ln 3 > 0$
La fonction f est définie, continue, strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$, $f(2) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

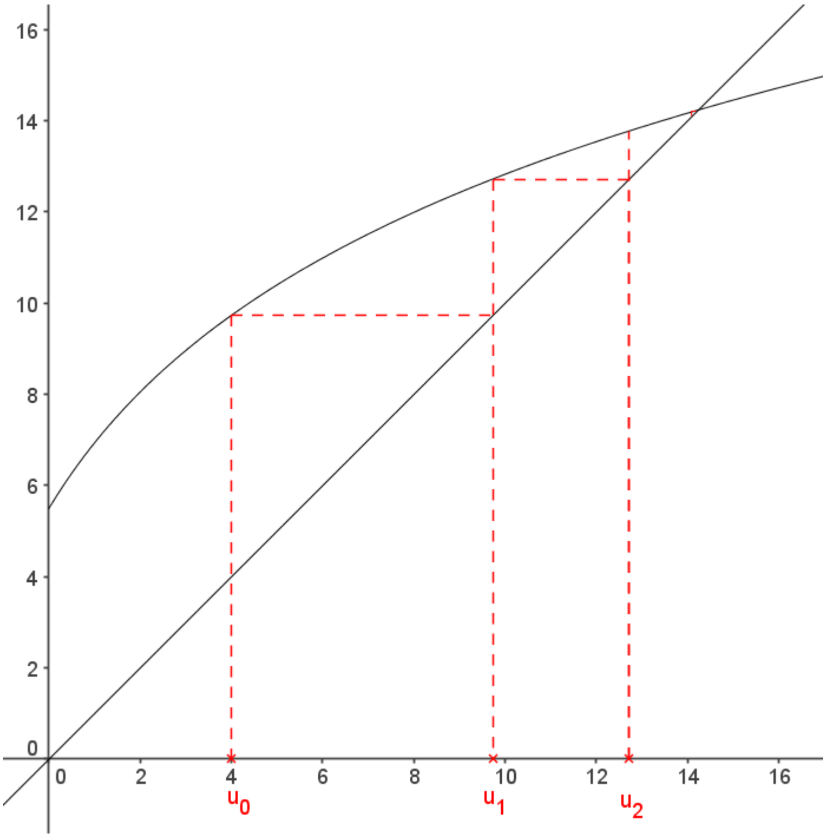
b. $f(14) \approx 0{,}17$ et $f(15) \approx -0{,}55$ et f continue sur $[0\,;+\infty[$ donc f s'annule sur l'intervalle $[14\,;15]$,
$f(14{,}23) \approx 0{,}003$ et $f(14{,}24) \approx -0{,}004$ donc f s'annule sur l'intervalle $[14{,}23\,;14{,}24]$, et $14{,}23 < \alpha < 14{,}24$

c.

x	0		2		α		$+\infty$
f	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$		$+$			0	$-$	

Partie B

1. *a.*



b. La suite (u_n) semble être croissante et converger vers le point d'intersection de la courbe **C** et de la droite **D** .

2. *a.* $g'(x) = \dfrac{5}{x+3}$ donc pour tout x positif, $g'(x) > 0$, g est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b. α est solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$ donc $5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0$ soit $5\ln(\alpha+3) = \alpha$ donc $g(\alpha) = \alpha$

c. **Initialisation :** $u_0 = 4$ et $14 \leq \alpha \leq 15$ donc $0 \leq u_0 \leq \alpha$

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $0 \leq u_n \leq \alpha$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

g est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc

si $0 \leq u_n \leq \alpha$ alors $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$ or $g(0) > 0$, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \alpha$

d. $0 \leq u_n \leq \alpha$ donc $f(u_n) \geq 0$ donc $g(u_n) - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante majorée par α donc est convergente et sa limite est comprise entre u_0 et α.

e. La suite (u_n) est définie par $g(u_n) = u_{n+1}$, cette suite est convergente donc sa limite est solution de l'équation $g(x) = x$ donc de $f(x) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. *a*. Si $u_n - 14{,}2 < 0$ alors $14{,}2 < u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ donc à condition de prendre n suffisamment grand, u_n est aussi proche que voulu de α or $14{,}23 \leq \alpha \leq 14{,}24$

Ici on souhaite que $u_n \in [\,14{,}2\,;\alpha\,]$, d'après la définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $u_n \in [\,14{,}2\,;\alpha\,]$ donc l'algorithme s'arrête.

b.

n	u_n	$u_n - 14{,}2$	Test	Algorithme
0	4	-10,2	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
1	9,72955	-4,47045	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
2	12,71963	-1,48037	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
3	13,77455	-0,42545	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
4	14,09931	-0,10069	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
5	14,19519	-0,00481	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
6	14,22315	0,02315	$u_n - 14{,}2 > 0$	s'arrête

$n_0 = 6$, l'algorithme affiche 14,22315

Exercice 2 (4 points) **Commun à tous les candidats**

Partie A

1. On a une succession de 3 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chaque épreuve a deux issues :

- succès : la boule est rouge ($p = \frac{3}{5} = 0{,}6$)
- échec : la boule n'est pas rouge ($q = 1 - p = 0{,}4$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge suit une loi binomiale de paramètres (3 ; 0,6)

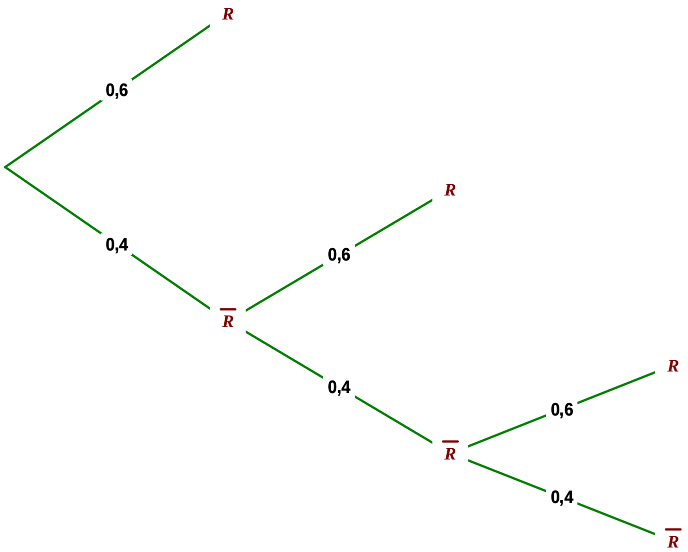
2. $p(\mathrm{X} = 1) = \binom{1}{3} p^{1} q^{3-1} = 3 \times 0{,}6 \times 0{,}4^{2} = 0{,}28800$

3. $\mathrm{E(X)} = n\, p = 3 \times 0{,}6 = 1{,}8$

En moyenne, sur un grand nombre de tirages, on obtiendra 1,8 boules rouges.

Partie B

1.



2. $p(\mathrm{Y} = 0) = p(\overline{R} \cap \overline{R} \cap \overline{R}\ \overline{\cap R \cap} \overline{R}) = 0{,}4^{3} = 0{,}064$

$p(\mathrm{Y} = 1) = 1 - p(\mathrm{Y} = 0) = 0{,}936$

y	0	1	Total
$p(\mathrm{Y} = y)$	0,064	0,936	1
E(Y)	0	0,936	0,936

$\mathrm{E(Y)} = 0 \times p(\mathrm{Y} = 0) + 1 \times p(\mathrm{Y} = 1) = 0{,}936$

3. Lors d'une expérience, on effectue :

un seul tirage : la boule obtenue est rouge donc $p(\mathrm{N} = 1) = 0{,}6$

deux tirages : la première boule obtenue n'est pas rouge et la seconde boule obtenue est rouge donc $p(\mathrm{N} = 2) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$

trois tirages : les deux premières boules obtenues ne sont pas rouges donc $p(\mathrm{N} = 3) = 0{,}4^{2} = 0{,}16$

n	1	2	3	Total
$p(\mathrm{N} = n)$	0,6	0,24	0,16	1
E(N)	0,6	0,48	0,48	1,56

E(N) = 1,56

4. La proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est $\frac{0{,}936}{1{,}56} = 0{,}6$ donc est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

Exercice 3 (5 points) **Commun à tous les candidats**

Partie A : restitution organisée de connaissances

a. Cherchons une fonction u constante solution de (E)

u est une constante donc sa dérivée est nulle

u est solution de (E) donc $a\,u + b = 0$ donc $u = -\dfrac{b}{a}$

b. Soit $f - u$ une solution de (E_0)

$f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\,y \Leftrightarrow (f - u)' = a\,(f - u) \Leftrightarrow f' - u' = a\,f - a\,u \Leftrightarrow f' = a\,f + u' - a\,u$

u solution de (E) $\Leftrightarrow u' = a\,u + b \Leftrightarrow u' - a\,u = b$

$f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\,y \Leftrightarrow f' = a\,f + u' - a\,u \Leftrightarrow f' = a\,f + b \Leftrightarrow f$ est solution de (E)

c. f est solution de (E) $\Leftrightarrow f - u$ solution de l'équation différentielle $y' = a\,y \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $(f - u)\,(x) = C\,\mathrm{e}^{a\,x}$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow f\,(x) = C\,\mathrm{e}^{a\,x} + u(x) \Leftrightarrow f\,(x) = C\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = C\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Partie B

1. Affirmation 1 : VRAIE

Les solutions de l'équation $y' + 3\,y = 6$ sont les fonctions de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 2$ où $C \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} C\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 2 = 2$ donc la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 2$.

2. Affirmation 2: VRAIE

Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' = y$ alors : $f(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{x}$

or pour tous réels α et β, $\mathrm{e}^{\alpha+\beta} = \mathrm{e}^{\alpha} \times \mathrm{e}^{b}$ donc $f\,(\alpha + \beta) = f\,(\alpha) \times f\,(\beta)$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Si la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = -2\,y$ alors $f(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-2\,x}$

La courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\dfrac{3}{2}$ donc $f(0) = \dfrac{3}{2}$ donc $\mathrm{C} = \dfrac{3}{2}$ donc pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2\,x}$.

La fonction f est positive sur R, donc l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(3)$ est :

$$\mathrm{A} = \int_0^{\ln 3} \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2\,x}\right]_0^{\ln 3} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2\ln 3} + \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{0}$$

$\mathrm{e}^{-2\ln 3} = \mathrm{e}^{-\ln 3} = \dfrac{1}{9}$ donc $\mathrm{A} = -\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}$

Exercice 4 (5 points)
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = (z-1)^2 - i^2 = (z - 1 - i)(z - 1 + i)$

$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1 - i)(z - 1 + i) = 0 \Leftrightarrow z - 1 - i = 0$ ou $z - 1 + i = 0$

donc l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$, admet pour solutions $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

2. $AM_1 = |z_1 - 1| = |i| = 1$

$AM_2 = |z_1 - 1| = |-i| = 1$ donc M_1 et M_2 appartiennent au cercle **C**.

Partie B

2. pour tout complexe z distinct de 1 on a : $z' - 1 = \dfrac{2z-1}{2z-2} - 1$

$z' - 1 = \dfrac{2z - 1 - (2z-2)}{2z-2} \Leftrightarrow z' - 1 = \dfrac{2z - 1 - 2z + 2}{2(z-1)} \Leftrightarrow z' - 1 = \dfrac{1}{2(z-1)} \Leftrightarrow (z'-1)(z-1) = \dfrac{1}{2}$.

3. $(z'-1)(z-1) = \dfrac{1}{2}$ donc pour tout point M distinct de A on a : $z \neq 1$ alors $z' \neq 1$ donc $M' \neq A$

$|z'-1| \times |z'-1| = \dfrac{1}{2}$, et $\arg (z'-1)(z'-1) = \arg \dfrac{1}{2} + 2k\pi$

soit $AM' \times AM = \dfrac{1}{2}$ et $\arg(z'-1) + \arg(z'-1) = 0 + 2k\pi$

donc $AM' \times AM = \dfrac{1}{2}$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

4. $z_P - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $|z_P - 1| = 1$ donc P appartient au cercle de centre A de rayon 1 et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Pour construire P : construisons la demi-droite d'origine A parallèle à la première bissectrice, ensemble des points M tels que $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ le point P est l'intersection de cette demi-droite et du cercle C.

5. $AP' \times AP = \dfrac{1}{2}$ donc $AP' = \dfrac{1}{2}$, P' appartient au cercle de centre A de rayon $\dfrac{1}{2}$,

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}) = 0 + 2k\pi$ donc $\dfrac{\pi}{4} + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}) = 0 + 2k\pi$,

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

Pour construire le point P', construisons le point P_1 symétrique de P par rapport à l'axe des réels, alors $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP_1}) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$,

donc P' est le point d'intersection du cercle de centre A de rayon $\dfrac{1}{2}$, et de la demi-droite $[AP_1)$

6. *a.* M appartient à la droite **D** d'équation $x = \dfrac{3}{4}$ donc a une affixe de la forme $\dfrac{3}{4} + i\,y$ où y est un réel

$$z' = \frac{\frac{3}{2} + 2i\,y - 1}{\frac{3}{2} + 2i\,y - 2} \Leftrightarrow z' = \frac{0{,}5 + 2i\,y}{-0{,}5 + 2i\,y} \Leftrightarrow z' = -\frac{0{,}5 + 2i\,y}{0{,}5 - 2i\,y}$$

0,5 + 2 i y et 0,5 – 2 i y sont deux complexes conjugués donc ont le même module, comme $|z'| = \left| -\dfrac{0{,}5 + 2i\,y}{-0{,}5 + 2i\,y} \right| = \dfrac{|0{,}5 + 2i\,y|}{|-0{,}5 + 2i\,y|}$ alors $|z'| = 1$. Le point M ' appartient au cercle **C** ' de centre O de rayon 1.

b. Soit un point M' sur le cercle **C** ' de centre O de rayon 1. M' est-il l'image d'un point M par f ? Existe-t-il z tel que $z' = \dfrac{2z-1}{2z-2}$? Si z existe alors $(z'-1)(z-1) = \dfrac{1}{2}$, donc pour que z existe, il faut que $z' \neq 1$ alors $z - 1 = \dfrac{1}{2(z'-1)}$.

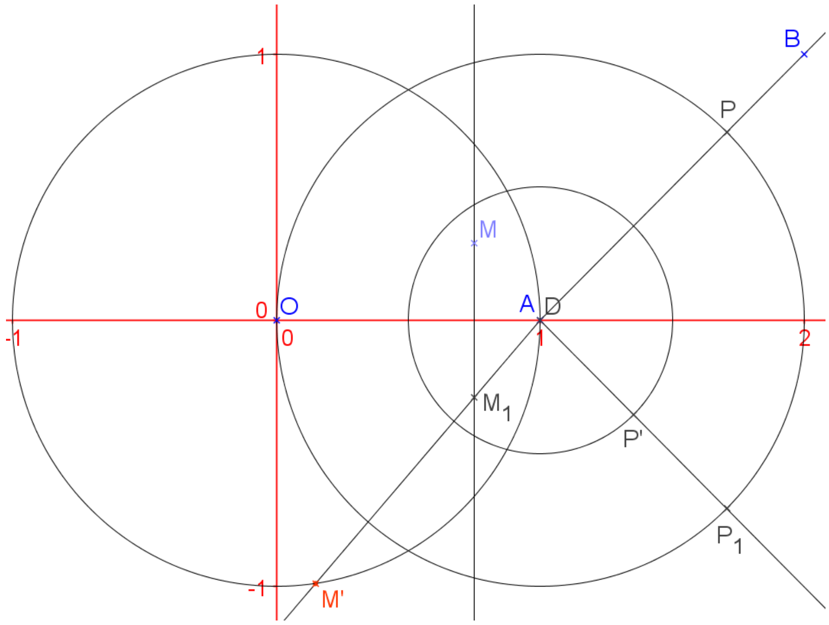
Le point A d'affixe 1 appartient au cercle **C** ' et n'a pas d'antécédent par f. Tout autre point de **C** ' admet un seul antécédent par f.

Prolongement :
Il est possible de construire M' si M appartient à la droite **D** :

Pour tout point $M \neq A$, $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$

Il suffit donc de construire le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, alors $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM_1}) = 0 + 2k\pi$

Les points A, M_1 et M' sont alignés et M' appartient à la demi-droite $[AM_1)$ de plus M' appartient au cercle **C** ' de centre O de rayon 1 donc M' est le point d'intersection de la demi-droite $[M_1)$ et du cercle **C** '.



EXERCICE 4 5 points
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Partie A

1. La rotation r de centre D qui transforme A en C a pour angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ donc $\frac{\pi}{2}$, donc F = r(C).

r transforme le carré direct ABCD en le carré direct CB'FD donc en DCEF et r(B) = E.
Le milieu de I de [BC] est transformé par r en le milieu de [EF] donc en J.

2. A ≠ C et I ≠ J donc il existe une seule similitude directe qui transforme A en C et I en J or r(A) = C et r(I) = J donc r est l'unique similitude directe qui transforme A en C et I en J.

3. *a.* A a pour affixe 0, C a pour affixe 1 + i et I a pour affixe $1+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, J a pour affixe $\frac{1}{2}+2\,\mathrm{i}$

b. L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a\,z + b$ avec a et b complexes, $a \neq 0$

s est la similitude directe qui transforme A en I et C en J donc $\begin{cases} 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} = a\times 0+b \\ \frac{1}{2}+2\,\mathrm{i} = a\,(1+\mathrm{i})+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ \frac{1}{2}+2\,\mathrm{i} = a\,(1+\mathrm{i})+1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ a\,(1+\mathrm{i}) = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ a = \frac{-1+3\,\mathrm{i}}{2\,(1+\mathrm{i})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ a = \frac{(-1+3\,\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})}{2\,(1+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i})} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ a = \frac{-1+\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}+3}{2\times 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ a = \frac{2+4\,\mathrm{i}}{2\times 2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ a = \frac{1}{2}+\mathrm{i} \end{cases}$. L'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)z+1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

c. D a pour affixe i, l'image de D est le point d'affixe $\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\mathrm{i}+1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ soit i, D est invariant par s, or une similitude directe admet un seul point invariant qui est le centre de la similitude donc D est le centre de s.

Partie B

1. L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a\,z + b$ avec a et b complexes, $a \neq 0$.

s_1 transforme O en M et N en P donc $\begin{cases} m = 0\times a+b \\ p = a\,n+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = m \\ p = a\,n+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = m \\ a = \frac{p-m}{n} \end{cases}$

L'écriture complexe de s_1 est $z' = \frac{p-m}{n}\,z+m$

2. *a.* si OMPN est un parallélogramme alors $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MP}$ donc $n = p - m$ donc $\frac{p-m}{n} = 1$,

l'écriture complexe de s_1 est $z' = z+m$ s_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$

,

si OMPN est un parallélogramme alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$ donc $m = p - n$ donc $\frac{p-n}{m} = 1$, l'écriture complexe de s_2 est $z' = z+n$

s_2 est la translation de vecteur $\overrightarrow{ON}$

b. OMPN n'est pas un parallélogramme donc $\frac{p-m}{n} \neq 1$ et $\frac{p-n}{m} \neq 1$, donc s_1 et s_2 ne sont pas des translations donc ont chacune un centre.

Le centre de s_1 est le point invariant par s_1, son affixe est solution de $z = \frac{p-m}{n}\,z+m$

soit $n\,z = (p-m)\,z+n\,m$ donc $z\,(n+m-p) = n\,m$ donc comme $\frac{p-m}{n} \neq 1$ alors $(n+m-p) \neq 1$ et $z = \frac{n\,m}{n+m-p}$.

Le centre de s_1 est le point invariant par s_2, son affixe est solution de $z = \frac{p-n}{m}\,z+n$ soit $m\,z = (p-n)\,z+n\,m$

donc $z\,(n+m-p) = n\,m$ donc $z = \frac{n\,m}{n+m-p}$. s_1 et s_2 ont le même centre.